$$a_k = \frac{6}{\sqrt{2k^3-10k^2+40}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6(-1)^{k+1}}{\sqrt{2k^3-10k^2+40}}$$

Chceme ukázat, že řada konverguje

Chceme použít Leibnizovo kritérium –

– proto budeme zkoumat monotonii

posloupnosti $\left\{ \frac{6}{\sqrt{2k^3-10k^2+40}} \right\}$

převedeme na problém zkoumání

monotonie funkce

$$x \longmapsto \frac{6}{\sqrt{2x^3-10x^2+40}}$$

monotonie funkce $\cancel{x \longmapsto \sqrt{2x^3-10x^2+40}}$

$$x \longmapsto 2x^3-10x^2+40$$

$$(2x^3-10x^2+40)' = 6x^2-20x = 2x(3x-10)$$

roste na $\left[\frac{10}{3}, +\infty\right)$

Odtud plyne, že

$$\left\{2k^3-10k^2+40\right\}_{k=4}^{\infty}$$

je rostoucí a má nezáporné členy

stačí dosadit $k=4$:

$$2\times 4^3-10\times 4^2+40$$
$$8\cdot 4^2-10\times 4^2+40$$
$$-2\times 4^2+40 = 8 > 0$$

~~tak~~ $a_k > 0$ pro $k \geq 4$ plyne

z monotonie posloupnosti

$x \mapsto \sqrt{x}$ je rostoucí na $[0,+\infty)$

odtud: $\left\{\sqrt{2k^3-10k^2+40}\right\}_{k=4}^{\infty}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ je klesající na $(0,+\infty)$

odtud: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2k^3-10k^2+40}}\right\}_{k=4}^{\infty}$ je klesající posloupnost

Řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, které mají

stejné členy až na konečný počet,

tj $\left(\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} n_0\right)(\forall k \in \mathbb{N}, k > n_0)(a_k = b_k)$

$N > n_0$:

$$\sum_{k=1}^{N} b_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \left(\sum_{k=1}^{n_0} (b_k - a_k)\right)$$

limita pro $N \to \infty$

zřejmě: Je-li $\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{b_k}\, a_k = +\infty$, pak

je i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$.

Je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \Delta \in \mathbb{R}$, pak

je $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \Delta + \sum_{k=1}^{n_0} (b_k - a_k)$

Pokud řada $\sum a_k$ nemá součet, tak i $\sum b_k$ nemá součet

Důsledek:

Změníme-li v řadě <u>konečný</u> počet členů, nezmění se to, zda má řada součet a zda řada konverguje.

Může se změnit její součet.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+5} \qquad \frac{1}{2k+5} = \frac{1}{k} \cdot \underbrace{\frac{1}{2+\frac{5}{k}}}_{\to \frac{1}{2}}$$

pro $k \to +\infty$

Věta (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum a_k$, $\sum b_k$ jsou řady s kladnými členy a nechť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0, +\infty).$$

Pak je $\sum a_k$ konvergentní právě když je $\sum b_k$ konvergentní.

Důkaz:

$$L = \lim \frac{a_k}{b_k}$$

$\varepsilon = \frac{L}{2}$

$$\varepsilon = \frac{L}{2} : (L-\varepsilon, L+\varepsilon) = \left(\frac{L}{2}, \frac{3}{2}L\right)$$

pro $L>0$ je i $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ a tedy

$(\exists n_0)(\forall k \in \mathbb{N},\ k > n_0)$ platí

$$\frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3}{2}L \qquad \Big/ \cdot b_k > 0$$

$$\frac{1}{2} L b_k < a_k < \frac{3}{2} L b_k$$

$$\sum a_k < +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{2} L b_k < +\infty \Rightarrow \sum b_k < +\infty$$

$$\sum b_k < +\infty \Rightarrow \sum \frac{3}{2} L b_k < +\infty \Rightarrow \sum a_k < +\infty$$

Tedy $\sum a_k < +\infty \iff \sum b_k < +\infty$

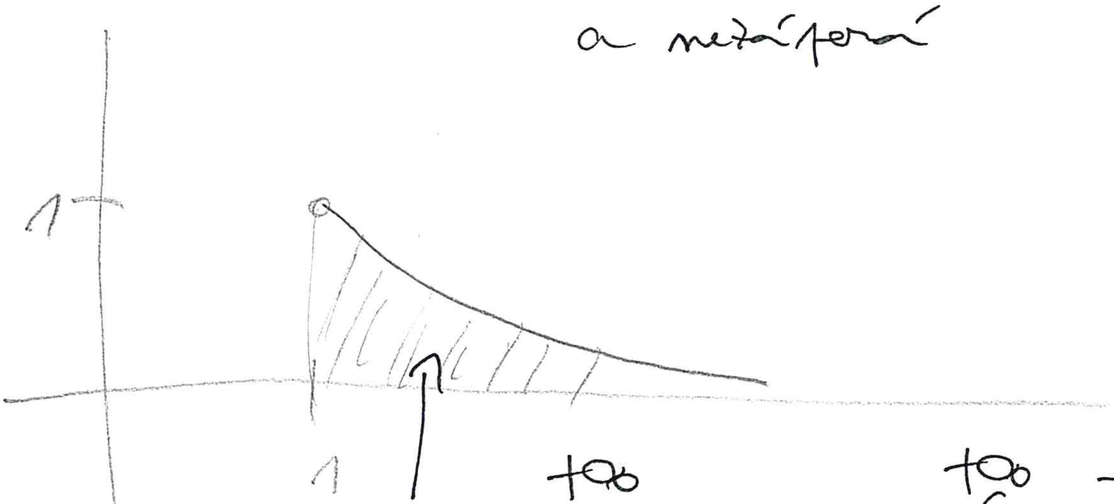
□

Víme: $\sum \frac{1}{k} = +\infty$

$\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k^3}} \quad \overset{?}{\underset{?}{<}} = \quad +\infty$$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ je klesající na $[1,+\infty)$
(stačí nerostoucí)
a nezáporná

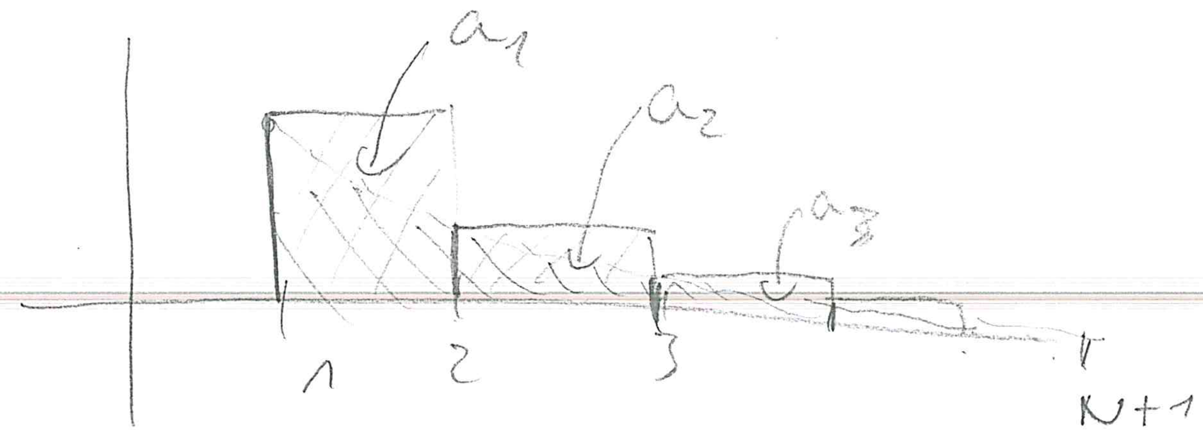


$$\sigma = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{+\infty} = \cancel{-2x}\,\frac{-2}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} - \left(\frac{-2}{\sqrt{1}}\right) =$$

$$= 0 + 2 = 2 < +\infty$$



$$\sum_{k=1}^{N} a_k \geq \int_1^{N+1} f(x)\,dx$$

kde $a_k = f(k)$, f je na $\langle 1, +\infty)$

nezáporná a klesající

$$\sum_{k=2}^{N} a_k \leq \int_1^{N} f(x)\,dx$$