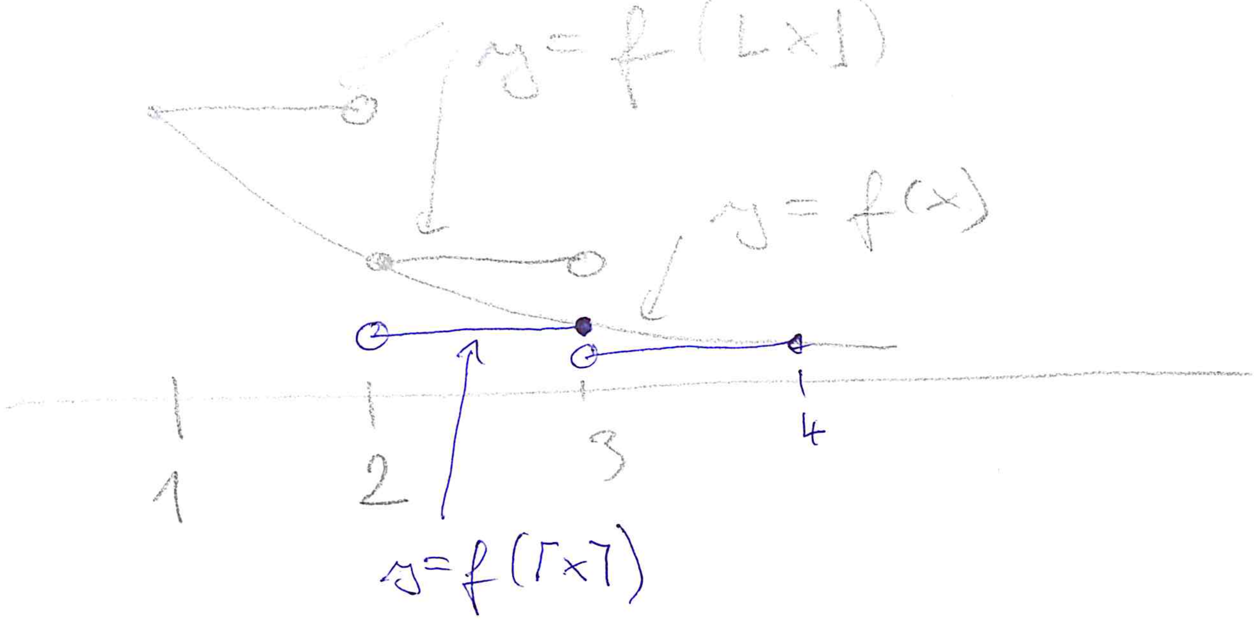
Definice:

Nechť $x \in \mathbb{R}$. <u>Dolní celou částí</u>, značíme ji $\lfloor x \rfloor$, nazýváme největší celé číslo nepřevyšující x:

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Podobně horní celá část $\lceil x \rceil$ je:

$$\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}, \quad \lceil x \rceil \geq x > \lceil x \rceil - 1$$



f nerostoucí na $[1, +\infty)$, $x \in [1, +\infty)$

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$$

$$f(\lfloor x \rfloor) \geq f(x) \geq f(\lceil x \rceil)$$

$$\int_1^{+\infty} f(\lfloor x \rfloor)\,dx \geq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_1^{+\infty} f(\lceil x \rceil)\,dx$$

$$\int_1^{n} f(\lfloor x \rfloor)\,dx \geq \int_1^{n} f(x)\,dx \geq \int_1^{\cancel{+\infty}\, n} f(\lceil x \rceil)\,dx$$

$$\int_1^{n} f(\lfloor x \rfloor)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(\lfloor x \rfloor)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\overset{k}{\cancel{\lfloor x \rfloor}}\right)$$

$$\int_1^{n} f(\lceil x \rceil)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(\lceil x \rceil)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

$n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \qquad (*)$$

Věta:

Nechť je f nerostoucí a kladná na $[1,+\infty)$ a nechť má Newtonův integrál na $[1,+\infty)$. Pak tento Newtonův integrál konverguje (tj. je konečný) právě když konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Důkaz – viz výše a:

~~Je-li $\sum$~~

z kladnosti f na $[1,+\infty)$ plyne $(\forall k \in \mathbb{N})(f(k)>0)$, a tedy $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ má součet.

Je-li $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < +\infty$, tak z $(*)$

plyne, že $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ ~~$< +\infty$~~ $\in \mathbb{R}$.

Je-li $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$, tak i $\sum_{k=2}^{+\infty} f(k) < +\infty$,

tedy i $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{\infty} f(k) < +\infty$

$\square$

Př: $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_1^{+\infty} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

tedy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} \in \mathbb{R}$ (konverguje)

Taylorův polynom exponenciální funkce:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k$$

$$\exp^{(n)} = \exp, \quad \exp(0) = 1$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Lagrangeův tvar zbytku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c_n \in (0,x) \cup (x,0)$$

$$\exp(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

$x=1$: $$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \underbrace{R_n(1)}_{\frac{\exp(c_n)}{(n+1)!}, \; c \in (0,1)}$$

$$1 \le \exp(c_n) \le e$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{\exp(c_n)}{(n+1)!} \le \frac{e}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \text{ pro } n \to +\infty$$

Z věty o sevřené posloupnosti plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(c_n)}{(n+1)!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(1) = 0$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n(1)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Odvodili jsme: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$

Podobně lze odvodit:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Věta:

Eulerovo číslo e je iracionální.

Důkaz:

Sporem – předpokládejme $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$q!\, e = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

distributivní zákon:

$$q!\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) =$$

$$= \frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \dots + \frac{q!}{k!}$$

věta o limitě součinu

$$q! \lim_{n\to\infty} \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} q! \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!}$$

+ distrib. zákon

$$q!\, e = q!\, \frac{p}{q} = (q-1)!\, p \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q! + q! + q(q-1)\dots 3 + \dots\ 1 \in \mathbb{N}$$

Ukážeme, že $\displaystyle\sum_{k=g+1}^{\infty} \frac{g!}{k!} \in (0,1)$ – tím je spor

$$\sum_{k=g+1}^{\infty} \frac{g!}{k!} = \frac{g!}{(g+1)!} + \frac{g!}{(g+2)!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{g+1} + \frac{1}{(g+1)(g+2)} + \dots$$

$$\sum_{k=g+1}^{n} \frac{g!}{k!} = \frac{1}{g+1} + \frac{1}{(g+1)(g+2)} + \dots \leq$$

$$\leq \frac{1}{g+1} + \frac{1}{(g+1)^2} + \frac{1}{(g+1)^3} + \dots$$

$n \to \infty$

$$\sum_{k=g+1}^{\infty} \frac{g!}{k!} \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(g+1)^l} = \frac{\frac{1}{g+1}}{1 - \frac{1}{g+1}} = \frac{1}{g}$$

$$\frac{1}{g+1} < 1 \quad (g \in \mathbb{N})$$

Je-li $g \geq 2$, tak $\frac{1}{g} \in (0,1)$, došli jsme ke sporu

$g = 1$?

$$\sum_{k=g+1}^{n} \frac{g!}{k!} = \frac{1}{g+1} + \frac{1}{(g+1)(g+2)} + \dots =$$

$$= \frac{1}{g+1}\left(1 + \frac{1}{g+2} + \frac{1}{(g+2)(g+3)} + \dots\right) \le$$

$$\le \frac{1}{g+1}\left(1 + \frac{1}{g+2} + \frac{1}{(g+2)^2} + \dots\right)$$

$n \to \infty$

$$\sum_{k=g+1}^{\infty} \frac{g!}{k!} \le \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{g+1} \cdot \frac{1}{(g+2)^{\ell}} =$$

$$= \frac{1}{g+1} \frac{1}{1-\frac{1}{g+2}} \qquad \frac{1}{g+2} \in (0,1)$$

$$g \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{1}{g+1} \cdot \frac{g+2}{g+1} = \frac{g+2}{(g+1)^2} =$$

$$= \frac{g+1+1}{(g+1)^2} = \frac{1}{g+1} + \frac{1}{(g+1)^2}$$

$$g \ge 1 \qquad \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1 \ ↯$$

Limitní přechod v nerovnosti:

$$\frac{1}{n} > 0$$

$n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \geq \lim_{n\to\infty} 0$$

$$0 = 0$$

NEABSOLUTNĚ KONVERGENTNÍ ŘADY

Definice:

Řekneme, že řada $\sum a_k$ neabsolutně konverguje, pokud zároveň a) konverguje

b) nekonverguje absolutně

(není pravda, že konverguje absolutně)

$a_k = b_k - c_k$, kde

$\left(|a_k| = b_k + c_k \right)$ $\qquad b_k = \frac{1}{2}\left(a_k + |a_k|\right)$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(|a_k| - a_k\right)$$

$\sum a_k$ je neabsolutně konvergentní

co platí pro $\sum b_k$, $\sum c_k$?

řady s nezápornými členy

tedy mají součet

1) $\sum b_k < +\infty \qquad \sum c_k < +\infty$

2) $\sum b_k = +\infty \qquad \sum c_k < +\infty$

3) $\sum b_k < +\infty \qquad \sum c_k = +\infty$

$$\boxed{4) \quad \sum b_k = +\infty \qquad \sum c_k = +\infty}$$

Označme $b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$

1) $b, c \in \mathbb{R}$, tak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b - c$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} b_k + c_k = b + c \in \mathbb{R}$$

řada $\sum a_k$ je absolutně konvergentní X

2) $b = +\infty$, $c < +\infty$

$b - c = +\infty$, tedy $\sum a_k$ není konvergentní X

$b + c = +\infty$

3) $b < +\infty$, $c = +\infty$

$b - c = -\infty$, tedy $\sum a_k$ není konvergentní X

4) $b = c = +\infty$, $b - c$ není definováno

Zároveň:

Je-li $\sum a_k$ neabsolutně konvergentní,

pak $\boxed{\sum b_k = \sum c_k = +\infty}$

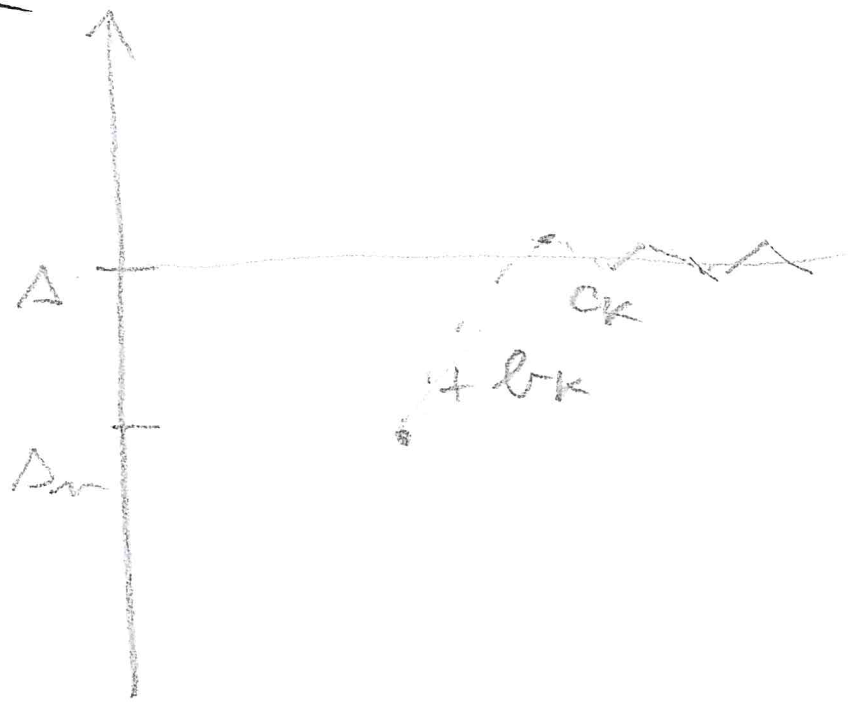
Věta:

Nechť $\sum a_k$ je neabsolutně konvergentní řada, $s \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

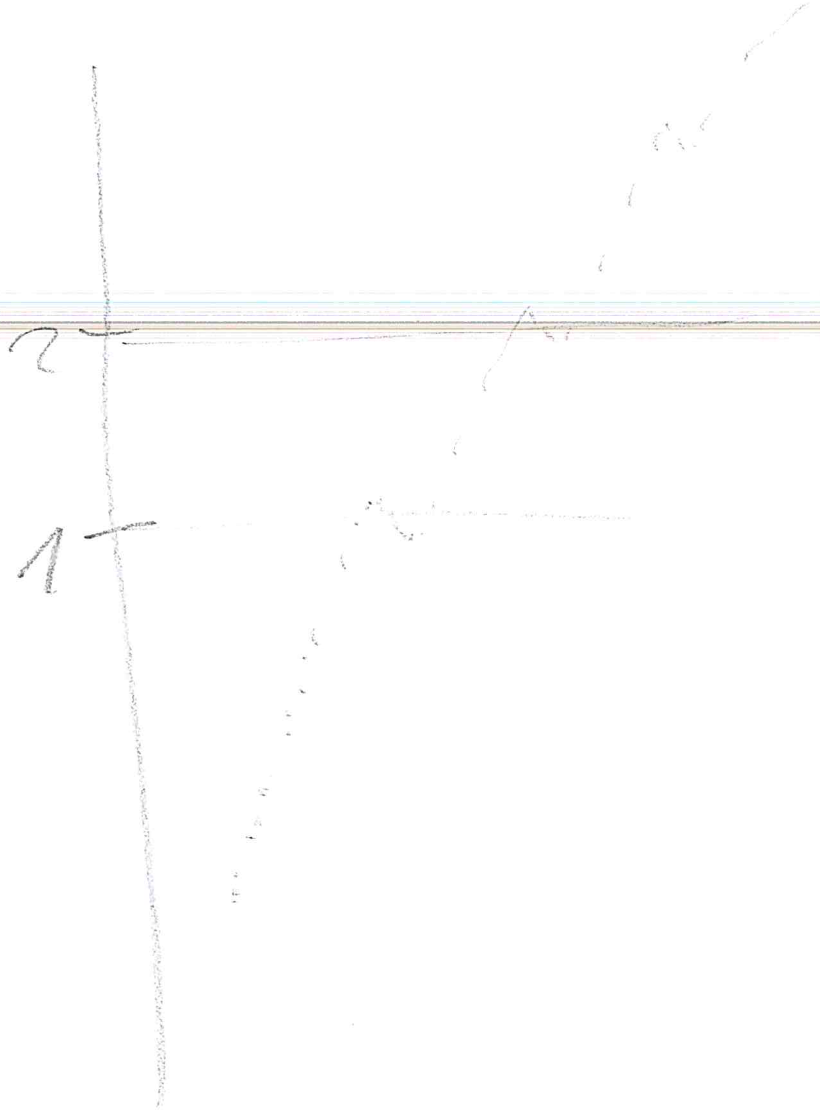
Pak existuje přerovnání řady $\sum a_k$, které má součet s.

Hlavní myšlenka důkazu:

$s \in \mathbb{R}$



$s = +\infty$



obdobně pro $s = -\infty$