Požadavky ke zkoušce z AN2

3. června 2021

- **Polynomy.** Základní pojmy: polynom, stupeň polynomu, koeficienty polynomu, kořen polynomu. Základní věta algebry. Věta o rozkladu polynomu s reálnými koeficienty na polynomy stupně jedna a dva, hlavní myšlenka důkazu. Limity polynomů v nekonečnech. Co víte o počtech reálných kořenů polynomů s reálnými koeficienty.

- **Racionální funkce.** Základní pojmy: ryze lomená funkce, parciální zlomky. Věta o rozkladu racionální funkce na součet polynomu a parciálních zlomků. Z výpočtu rozkladu: soustava porovnávající koeficienty obou stran a počet kořenů polynomu (není na skenu, ale určitě jsem o tom mluvila).

- **Mocninné funkce.** Definice mocnin s přirozeným exponentem. Definice mocniny s celočíselným a racionálním exponentem. Z jakých vlastností a jak tyto definice přirozeným způsobem plynou?

- **Exponenciální funkce.** Definice exponenciální funkce pro racionální argumenty. Hustota racionálních čísel v množině reálných čísel, definice exponenciální funkce pro iracionální exponenty. Limita $(\exp(x) - 1)/x$ v nule a její geometrický význam. Věta 6.3.3 a odvození vlastností exponenciální funkce: kladnost, derivace, limity v nekonečnech. Vysvětlení exponenciálního růstu na úloze o rýži a šachovnici. Použití monotonie exponenciálních funkcí na řešení exponenciálních a logaritmických nerovnic.

- **Logaritmická funkce.** Vlastnosti, ze kterých plyne existence inverzní funkce k exponenciální funkci. Definice logaritmu, definiční obor a obor hodnot, vztah k definičnímu oboru a oboru hodnot exponenciální funkce. Odvození vzorce pro logaritmus součinu ze vzorce pro exponenciální funkci. Definice exponenciální funkce a logaritmu s obecným základem, monotonie exponenciální funkce s obecným základem a jak se projeví na grafu mocninných funkcí. Odvození derivace logaritmu, speciálně derivace v bodě jedna jako významná limita. Logaritmická škála na ose y (viz grafy na 91-divoc.com) a proč je zde grafem exponenciální funkce přímka.

- **Goniometrické funkce.** Trigonometrická definice goniometrických funkcí, na čem je založena (podobnost trojúhelníků). Odvození součtových vzorců z trigonometrické definice. Odvození limity $\sin(x)/x$ v nule z definice sinu na jednotkové kružnici. Věta o limitě sevřené funkce (pro ambicióznější i s důkazem). Limity funkcí $(1-\cos(x))/x$, $(1-\cos(x))/x^2$ v nule. Odvození vzorců pro derivace goniometrických funkcí. Odvození limity $\sin(x)/x$ v nekonečnech. Definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici. Pro ambicióznější: odvození součtových vzorců na jednotkové kružnici.

- **Cyklometrické funkce.** Definice cyklometrických funkcí, použití na řešení rovnic $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{cotg} x = a$. Odvození vzorců pro derivace cyklometrických funkcí.

- **Taylorův polynom** funkcí exp, sin, cos v nule, log v jedné.

- **Opakování definice limity.** Limita monotonní funkce jako supremum/infimum funkčních hodnot. Vysvětlení na grafech funkcí exp, log, artg, arcotg. Pro ambicióznější: napište definici příslušné limity a definici suprema/infima a vysvětlete, jak spolu souvisí.

- **Limita složené funkce.** Případ spojité vnější funkce (minulý semestr). Případ ryze monotonní (tj. rostoucí/klesající) vnitřní funkce.

- **L'Hospitalovo pravidlo.** Použití na příkladech, předpoklady, za jakých se používá.

- **Integrály.**
  Definice *primitivní funkce* na intervalu. Jednoznačnost primitivní funkce (až na konstantu) na intervalu. Existence primitivní funkce ke spojité funkci, důkaz založený na Riemannově integrálu s proměnnou horní mezí, vlastnosti obsahu, které používáme (monotonie, aditivita, obsah obdélníku). Příklad funkce, která má primitivní funkci, ale není možné ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí.
  Metody výpočtu primitivní funkce: Metoda substituce a její odvození z derivace složené funkce, dvě verze substituce – s inverzní funkcí a bez inverzní funkce. Metoda per partes a její odvození z derivace součinu. Výpočet primitivní funkce k racionální funkci. Použití rekurentní formule na výpočet integrálu (my jsme ji použili na výpočet $\int \sin^n(x)$, $\int \cos^n(x)$, používá se i v jiných případech, odvození těchto formulí).
  Riemannův integrál: po částech konstantní funkce, dolní a horní integrální součty, dolní a horní Riemannův integrál, Riemannovsky integrovatelná funkce. Důkaz, že funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na něm Riemannovsky integrovatelná. Příklad funkce, která není Riemannovsky integrovatelná (Dirichletova funkce), hodnota jejího dolního

a horního Riemannova integrálu. Nevlastní Riemannův integrál.
Newtonův integrál: zobecněná primitivní funkce, definice Newtonova integrálu.
Linearita (tj. vzorec pro integrál součtu a násobku) jako vlastnost integrálů (neurčitého, Riemannova určitého, Newtonova určitého).
Geometrické aplikace integrálu: obsah obrazce, délka křivky, objem a obsah pláště rotačně symetrického tělesa, vše i s odvozením, odvození obsahu pláště komolého kužele.

- **Řady čísel.** Základní pojmy: řada, člen řady, částečné součty řady, součet řady, konvergentní řada, divergentní řada, oscilující řada. Nutná podmínka konvergence řady i s důkazem. Geometrická řada, podmínka konvergence, částečné součty, součet i s odvozením. Řady s nezápornými členy, kritéria konvergence: srovnávací, limitní srovnávací, limitní podílové, integrální vše i s důkazy. Harmonická řada, její součet i s důkazem. Řady se střídavými znaménky (tzv. alternující řady), Leibnizovo kritérium konvergence i s důkazem (stačí ukázat na konkrétním příkladě). Absolutně konvergentní řady, kritéria konvergence, konvergence absolutně konvergentní řady i s hlavní myšlenkou důkazu, přerovnání absolutně konvergentní řady i s důkazem. Neabsolutně konvergentní řada, přerovnání neabsolutně konvergentní řady k libovolnému předem danému součtu i s hlavní myšlenkou důkazu. Eulerovo číslo jako součet řady, odvození přes Taylorovu řadu a Lagrangeův tvar zbytku, důkaz iracionality Eulerova čísla.