Počítání integrálů
(učební text pro studenty FP TUL)

Martina Šimůnková

9. května 2022

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Základní pojmy

Primitivní funkcí funkce f na otevřeném intervalu I rozumíme funkci F, pro kterou platí

$$(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$$

Příklady.
Funkce $F : x \mapsto x^3 - 5x$ je primitivní funkcí funkce $f : x \mapsto 3x^2 - 5$ na množině reálných čísel.

Derivace $(-1/x)'$ je rovna $1/x^2$, a proto je funkce $F : x \mapsto -\frac{1}{x}$ primitivní funkcí funkce $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Podobně je funkce $F : x \mapsto \log(x)$ primitivní funkcí funkce $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $F : x \mapsto \log(-x)$ na intervalu $(-\infty, 0)$.

Funkce $F : x \mapsto 2\sqrt{x}$ je primitivní funkcí funkce $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Jiný název pro primitivní funkci je *neurčitý integrál.* Neurčitý integrál značíme symbolem $\int$ a integrační proměnnou symbolem $\mathrm{d}x$. Výše uvedené příklady zapíšeme pomocí těchto symbolů

$$\begin{aligned}
\int 3x^2 - 5 \,\mathrm{d}x &= x^3 - 5x \\
\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{x} \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \log(x) \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \log(-x) \\
\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x &= 2\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Všimněte si, že se z tohoto zápisu vytratily intervaly. Není to správné, ale budeme se toho zpravidla při výpočtu neurčitého integrálu dopouštět. Jiné to bude při práci s určitým integrálem, tam bude interval dán mezemi integrálu.

1.2 Jednoznačnost

Primitivní funkce není dána jednoznačně. Například $(x^2)' = (x^2 + 1)' = 2x$, a tedy obě funkce $F_1(x) = x^2$ i $F_2(x) = x^2 + 1$ jsou primitivními funkcemi stejné funkce $f(x) = 2x$. Pro libovolné číslo c je i funkce $F(x) = F_1(x) + c$ primitivní funkcí funkce f, primitivních funkcí má tedy funkce f nekonečně mnoho. Číslo c někdy nazýváme integrační konstantou a někdy aditivní konstantou. Říkáme pak, že je primitivní funkce dána jednoznačně až na aditivní konstantu. Jiná nejednoznačnost v pojmu primitivními funkce není, jak tvrdí následující věta.

Věta. Nechť jsou funkce F_1, F_2 primitivními funkcemi funkce f na intervalu I. Pak existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro $x \in I$ platí $F_1(x) = F_2(x) + c$.

DŮKAZ. Nechť jsou F_1, F_2 primitivními funkcemi funkce f na intervalu I. Pak z definice primitivní funkce plyne, že pro $x \in I$ platí $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$. Odtud plyne $F_1'(x) = F_2'(x)$.

Uvažujme funkci, která je rozdílem těchto dvou primitivních funkcí $x \mapsto F_1(x) - F_2(x)$. Z výše uvedeného plyne, že její derivace je rovna nule na intervalu I. Odtud plyne, že je tato funkce na intervalu I zároveň neklesající i nerostoucí (plyne z věty o monotonii a derivaci), a tedy je konstantní. A odtud plyne dokazované tvrzení $F_1 = F_2 + c$ na I. $\square$

Následující případ ukazuje, že je ve větě podstatné uvažovat primitivní funkce na intervalu. Obě funkce mají na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ derivaci rovnu $1/x$ a přesto se neliší jen o konstantu.

$$x \mapsto \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ \log(-x) & x < 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ 2 + \log(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Vzorce typu $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + c$ někteří puritánštější matematici nemají příliš v lásce právě kvůli nejasnosti definičního oboru a nejasnosti významu konstanty c. V tomto textu integrační konstantu c zpravidla nebudeme uvádět.

1.3 Existence

Ke spojitým funkcím existuje primitivní funkce, ale ne vždy ji můžeme vyjádřit pomocí elementárních funkcí. K takovým, pomocí elementárních funkcí nevyjádřitelným integrálům, patří například $\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

Příkladem funkce, která nemá primitivní funkci je například funkce signum a obecně jakákoliv funkce s nespojitostí typu skok. Pokud by totiž pro nějakou funkci F platilo na okolí nuly $F'(x) = \mathrm{sgn}(x)$, pak by pro $x > 0$ bylo $F'(x) = 1$ a tedy i $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$ a z věty 7.2.1 z [JV] by plynulo $F'(0) = 1$, což je ve sporu s $F'(0) = \mathrm{sgn}(0) = 0$.

Větu o existenci primitivní funkce ke spojité funkci dokážeme později za pomoci Riemannova integrálu.

1.4 Základní vzorce

Následující vzorce jsou přímým důsledkem vzorců pro derivace. Ověřte jejich platnost zderivováním.

Pro $n \neq -1$: $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$ (jedním zápisem jsme pokryli intervaly kladných i záporných čísel)

$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)$

$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)$

$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x)$

Pro $a > 0$: $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})$
$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x)$

1.5 Linearita integrálu

Pro funkce f, g a čísla a, b platí $(af+bg)' = af' + bg'$. Odtud plyne obdobný vztah pro integrál

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

například

$$\int (x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int x^2 + 2x + 1\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x$$

Připomeňme souvislost vztahu (1.1) s lineární algebrou. Na levé straně je integrál z lineární kombinace dvou funkcí a na pravé straně je lineární kombinace integrálů. Integrování je tedy operace, která zobrazuje lineární kombinaci na lineární kombinaci obrazů. Takové zobrazení nazýváme lineárním zobrazením. V tomto smyslu je tedy integrování lineární.

1.6 Úlohy na procvičení

1. Ověřte zderivováním platnost vzorců v kapitole základní vzorce.

Pro následující funkce a intervaly nalezněte primitivní funkce a udělejte zkoušku.

2. $x \mapsto x^3 - \sqrt{x}$, $I = (0, +\infty)$
3. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}+2x^2}{x^3}$, $I = (0, +\infty)$
4. $x \mapsto 3\cos(x) - 2\sin(x)$, $I = \mathbb{R}$
5. $x \mapsto 2 - 3\exp(x)$, $I = \mathbb{R}$
6. $x \mapsto (1+\sqrt{x})^3$, $I = (0, +\infty)$

Odpovězte na otázky a své odpovědi zdůvodněte:

7. Kolik mají funkce z úloh nahoře primitivních funkcí?
8. Má funkce $x \mapsto \exp(-x^2)$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
9. Má funkce $x \mapsto \begin{cases} 2+x & x<1 \\ 5-x & x \geq 1 \end{cases}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
10. Má funkce $x \mapsto \begin{cases} 2+x & x<1 \\ 4-x & x \geq 1 \end{cases}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
11. Jaký význam má konstanta c ve vzorci $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + c$?
12. Co znamená výrok: "Integrování je lineární operace."?

Kapitola 2

Lineární substituce

V jedné z dalších kapitol vysvětlíme metodu substituce při výpočtu integrálů. V této kapitole vysvětlíme její nejjednodušší variantu – případ lineární substituce. Chceme například spočítat integrál

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Víme, že $\int \sin(y)\,\mathrm{d}y = -\cos(y)$ a tak si tipneme, že integrál (2.1) je roven $-\cos(2x+1)$. Zderivováním zjistíme $(-\cos(2x+1))' = 2\sin(2x+1)$. Odtud nahlédneme, že náš tip stačí jen trochu opravit a dostaneme

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)$$

U složitějších případů budeme substituci provádět následovně:

1. Zvolíme substituci, v našem příkladě $y = 2x+1$.

2. Vypočteme vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$. V našem příkladě $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$. Odtud vyjádříme $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$. Obecně pro substituci $y = ax+b$ je $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y$.

3. Provedeme substituci v integrálu, v našem příkladě převedeme integrál $\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x$ na integrál $\int \frac{1}{2}\sin(y)\,\mathrm{d}y$.

4. Spočítáme integrál po substituci

$$\int \tfrac{1}{2}\sin(y)\,\mathrm{d}y = -\tfrac{1}{2}\cos(y)$$

5. Do výsledku vrátíme původní proměnnou.
$$-\tfrac{1}{2}\cos(y) = -\tfrac{1}{2}\cos(2x+1)$$
6. Dostali jsme výsledek, případně ještě uděláme zkoušku jeho zderivováním.

Ukážeme náš postup na dalším příkladě. Chceme spočítat integrál
$$\int \sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x$$
Zvolíme substituci $y = 3x - 4$, zderivujeme $\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x$, vyjádříme $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y$ a provedeme substituci. Dostaneme integrál s proměnnou y a spočítáme ho
$$\int \frac{1}{3}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{3}y^{1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\frac{1}{1+1/2}y^{1+1/2} = \frac{2}{9}y^{3/2} = \frac{2}{9}\sqrt{y^3}$$
Na závěr provedeme zpětnou substituci a tím dostaneme výsledek
$$\int \sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3}$$

Za zmínku stojí, že výrazy $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ někdy nazýváme diferenciály (nebudeme se zmiňovat, odkud se tento název vzal, je to složitější záležitost a dostaneme se k tomu při probírání funkcí více proměnných) a že jejich význam známe z diferenciálního počtu – jsou to „nekonečně malé“ přírůstky funkcí. Víme, že derivace je podíl takových přírůstků, tedy $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a odtud dostáváme vztah $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$.

2.1 Úlohy na procvičení

Vypočtěte integrály a udělejte zkoušku

1. $\int \cos(2+x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \exp(-x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{2}{3x-1}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{1}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x$
5. $\int (2x+1)^5\,\mathrm{d}x$

Kapitola 3

Integrace racionální funkce

3.1 Základní pojmy

Připomeneme na příkladech vybrané pojmy: *polynom* (*mnohočlen*), *racionální funkce*, *ryze lomená racionální funkce*, *parciální zlomek*.

Racionální funkce je například

$$\frac{x^5}{x^4-1}$$

Vydělením dostaneme součet *polynomu* a *ryze lomené funkce* – ta má v čitateli polynom nižšího stupně než ve jmenovateli.

$$\frac{x^5}{x^4-1} = x + \frac{x}{x^4-1}$$

Parciálními zlomky pak v tomto případě jsou

$$\frac{1}{x+1} \quad \frac{1}{x-1} \quad \frac{1}{x^2+1} \quad \frac{x}{x^2+1}$$

Parciální zlomky budeme rozlišovat podle kořenů jmenovatele – podle toho, zda jsou kořeny reálné nebo komplexní a zda jsou jednonásobné či vícenásobné.

1. Jednonásobný reálný kořen: $\frac{1}{x+a}$
2. Vícenásobný reálný kořen s násobností $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $\frac{1}{(x+a)^n}$

3. Jednonásobné komplexní kořeny: $\frac{\cdots}{x^2+px+q}$

4. Vícenásobné komplexní kořeny s násobností $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $\frac{\cdots}{(x^2+px+q)^n}$

V případě komplexních kořenů je standardně v čitateli parciálního zlomku buď 1 nebo x. My ukážeme, že je možné čitatele volit vhodněji s ohledem na snažší výpočet integrálu.

3.2 Integrace parciálních zlomků

Napíšeme několik vzorců. V kapitole úloh na procvičení pak necháme čtenáři vzorce zderivováním ověřit.

1. $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x = \log|x+a|$

2. $\int \frac{1}{(x+a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}, n > 1$

3. $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$ pro jmenovatele bez reálných kořenů. Jmenovatele doplníme na čtverec a substitucí převedeme na integrál $\int \frac{1}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y$. Viz příklad dole.

4. $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \log(x^2+px+q)$ také pro jmenovatele bez reálných kořenů.

Poznámka. V případě 4 lze vzorec použít i pro případ s reálnými kořeny ve jmenovateli, pokud dáme logaritmovaný výraz do absolutní hodnoty. V případě 3 také můžeme postup použít s reálnými kořeny ve jmenovateli, ale dojdeme k integrálu $\int \frac{1}{y^2-a^2}\,\mathrm{d}y$.

Příklad na doplnění na čtverec. Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x$$

Doplníme na čtverec výraz ve jmenovateli $x^2+3x = (x+3/2)^2 - 9/4$, dosadíme do integrálu a přitom sečteme $-9/4+4$. Dostaneme $\int \frac{1}{(x+3/2)^2+7/4}\,\mathrm{d}x$. Nyní použijeme vzorec $\int \frac{1}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}$ pro $a = \sqrt{7/4} = \sqrt{7}/2$ a se substitucí $y = x+3/2$. Dostaneme výsledek (který můžeme zkontrolovat zderivováním)

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$$

Ještě zbývá probrat případ násobných komplexních kořenů ve jmenovateli. Násobnost těchto kořenů označíme n, $n \geq 2$. Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

Podobně jako v předchozím příkladě doplníme kvadratický výraz ve jmenovateli na čtverec a substitucí převedeme integrál na

$$\int \frac{\tilde{A}y+\tilde{B}}{(y^2+r^2)^n}\,\mathrm{d}y$$

Pro první integrál získáme substitucí $t = y^2 + r^2$ vzorec

5. $\int \frac{y}{(y^2+r^2)^n}\,\mathrm{d}y = \frac{-1}{2(n-1)(y^2+r^2)^{n-1}}$

Druhý označíme K_n

$$K_n = \int \frac{1}{(y^2+r^2)^n}\,\mathrm{d}y,$$

pro $n = 1$ použijeme vzorec

6. $\int \frac{1}{y^2+r^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{r}\operatorname{arctg}\frac{y}{r}$

a pro $n \geq 2$ použijeme k výpočtu tzv. rekurentní vzorec

$$K_{n+1} = \frac{y}{2nr^2(y^2+r^2)^n} + \frac{2n-1}{2nr^2}K_n \tag{3.1}$$

Příklad na použití rekurentní formule. Vypočteme integrál

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^3}\,\mathrm{d}x$$

Rekurentní formuli (3.1) použijeme nejdříve pro $n = 1$

$$K_2 = \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4}K_1,$$

dosadíme ze vzorce 6 za K_1 a dostaneme

$$K_2 = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Dále použijeme rekurentní formuli pro $n = 2$

$$K_3 = \int \frac{1}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{8} K_2$$

a dosadíme z předchozího za K_2. Dostaneme

$$K_3 = \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

a po úpravě

$$K_3 = \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3x}{32(x^2+2)} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Příklad. Vypočteme integrál

$$\int \frac{3x-6}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x$$

Integrál rozdělíme na lineární kombinaci integrálů

$$3\int \frac{x}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x - 6\int \frac{1}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x,$$

první integrál vypočteme buď substitucí $t = x^2 + 2$ nebo pomocí vzorce (5)

$$\int \frac{x}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x = \frac{-1}{4(x^2+2)^2},$$

druhý jsme spočítali výše. Zkompletováním výsledků (a pokrácením zlomků) dostaneme

$$\int \frac{3x-6}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x = -\frac{3}{4(x^2+2)^2} - \frac{3x}{4(x^2+2)^2} - \frac{9x}{16(x^2+2)} - \frac{9}{16\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

3.3 Rozklad na součet parciálních zlomků

Připomeneme na příkladu rozklad na součet parciálních zlomků. Vezmene funkci z úvodní kapitoly a vyjádříme ji jako lineární kombinaci parciálních zlomků

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x^2+1} + \frac{Dx}{x^2+1}$$

Naším úkolem je nyní spočítat takové hodnoty čísel A až D, aby se výrazy rovnaly pro všechna reálná x mimo kořeny jmenovatele. Roznásobíme společným jmenovatelem a dostaneme rovnici

$$x = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + C(x^2-1) + Dx(x^2-1)$$

Po úpravě – roznásobení závorek a vytknutí koeficientů A až D – dostaneme

$$x = A(x^3-x^2+x-1) + B(x^3+x^2+x+1) + C(x^2-1) + D(x^3-x)$$

Připomeňme, že hledáme hodnoty čísel A až D takových, že daná rovnice je splněná pro nekonečně mnoho x. To je možné jen pokud se všechny členy na levé a pravé straně odečtou a po úpravě vyjde rovnice $0 = 0$. Odtud dostaneme rovnice pro A až D – porovnáme koeficienty u stejných mocnin na levé a pravé straně.

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + D \\ 0 &= -A + B + C \\ 1 &= A + B - D \\ 0 &= -A + B - C \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme některou metod lineární algebry a dostaneme $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$.

Odtud dostaneme rozklad – vyjádření složitějšího zlomku jako součet jednodušších výrazů.

$$\frac{x^5}{x^4-1} = x + \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/4}{x-1} + \frac{-x/2}{x^2+1}$$

3.4 Proč rozklad na parciální zlomky funguje

Detailní analýza by byla rozsáhlá, proto jen uvedeme hlavní myšlenku pro konkrétní případ jmenovatele. Zvolíme ho přitom dostatečně obecně, aby bylo vidět, jak postupovat v jiných případech.

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^2(x^2+5)^3} \tag{3.2}$$

Stupeň jmenovatele je osm, proto je stupeň polynomu P v čitateli nejvýše sedm a obsahuje osm parametrů

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7$$

Racionální funkci R můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci osmi funkcí. Pro zkrácení zápisu označíme jmenovatel $J(x) = (x-1)^2(x^2+5)^3$

$$\tfrac{1}{J(x)} \quad \tfrac{x}{J(x)} \quad \tfrac{x^2}{J(x)} \quad \tfrac{x^3}{J(x)} \quad \tfrac{x^4}{J(x)} \quad \tfrac{x^5}{J(x)} \quad \tfrac{x^6}{J(x)} \quad \tfrac{x^7}{J(x)} \tag{3.3}$$

Úloha. Ukažte, že výše uvedených osm funkcí je lineárně nezávislých.

Rozklad na parciální zlomky odpovídá vyjádření funkce R jako lineární kombinace funkcí

$$\tfrac{1}{x-1} \quad \tfrac{1}{(x-1)^2} \quad \tfrac{1}{x^2+5} \quad \tfrac{x}{x^2+5} \quad \tfrac{1}{(x^2+5)^2} \quad \tfrac{x}{(x^2+5)^2} \quad \tfrac{1}{(x^2+5)^3} \quad \tfrac{x}{(x^2+5)^3} \tag{3.4}$$

Úloha. Ukažte, že každou funkci z (3.4) je možné vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí z (3.3).

Formulace problému. Při otázce v záhlaví kapitolky nás zajímá, zda je možné každou funkci z (3.2) vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí z (3.4).

Úloha. Rozmyslete si, že k odpovědi ano na zformulovaný problém stačí ukázat, že funkce z (3.4) jsou lineárně nezávislé.

Poznámka. Důkaz lineární nezávislosti zmiňované v úloze dělat nebudeme.

3.5 Integrace bez rekurentní formule

Na příkladě ukážeme integraci s použitím rekurentní formule a alternativní postup bez rekurentní formule. V závěru budeme diskutovat, jak a proč tento postup funguje v obecném případě.

Příklad. Rozložíme na parciální zlomky a následně zintegrujeme výraz

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}$$

Standardní parciální zlomky jsou

$$\frac{A}{x^2+1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx}{(x^2+1)^2} \tag{3.5}$$

Výpočet dá $A = 4$, $B = 0$, $C = -4$, $D = 0$, tedy

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{(x^2+1)^2}$$

První integrál je

$$\int \frac{4}{x^2+1} = 4\operatorname{arctg}(x)$$

druhý spočítáme pomocí rekurentní fomrule

$$\int \frac{4}{(x^2+1)^2} = 4K_2 = 4\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}K_1\right) = \frac{2x}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg}(x)$$

Výsledek pak je

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = 4\operatorname{arctg}(x) - \left(\frac{2x}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg}(x)\right)$$

a po úpravě

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = 2\operatorname{arctg}(x) - \frac{2x}{x^2+1}$$

Alternativní postup je uvědomit si, že

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \tag{3.6}$$

a použít při rozkladu na parciální zlomky jinou bázi

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{-2Cx}{(x^2+1)^2} + \frac{D(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Standardním postupem jako při rozkladu na parciální zlomky dostaneme $A = 2$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2$ a odtud dostaneme

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{-2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

a zintegrováním (zde je podstatné, že k druhému zlomku máme integrál bez výpočtu, stačí se podívat na (3.6))

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{arctg}(x) - \frac{2x}{x^2+1}$$

Ještě se zamysleme nad tím, jak a proč takový postup bude fungovat v obecném případě. Vraťme se k bazím (3.3), (3.4). Zde bychom použili parciální zlomky

$$\tfrac{1}{x-1} \quad \tfrac{1}{(x-1)^2} \quad \tfrac{1}{x^2+5} \quad \tfrac{x}{x^2+5} \quad \left(\tfrac{1}{x^2+5}\right)' \quad \left(\tfrac{x}{x^2+5}\right)' \quad \left(\tfrac{1}{(x^2+5)^2}\right)' \quad \left(\tfrac{x}{(x^2+5)^2}\right)' \tag{3.7}$$

První, co je dobré si uvědomit, je, že derivací zlomku s kořenem násobnosti n ve jmenovateli dostaneme zlomek s kořenem násobnosti $n+1$. Pak je vidět, že zlomky v (3.7) lze vyjádřit jako lineární kombinaci zlomků z (3.3). Zbývá dokázat, že jsou zlomky v (3.7) lineárně nezávislé (a že jich je správný počet – stejný, jako je dimenze prostoru). Odtud plyne, že tvoří bazi lineárního obalu (3.3), a tedy je možné je úspěšně použít na rozklad funkce (3.2).

Následující úlohy procvičují lineární závislost/nezávislost funkcí.

Úloha. Ukažte, že funkce v_1, v_2, v_3, v_4 jsou lineárně závislé

$$v_1(x) = (x-1)^2, \quad v_2(x) = (x-2)^2, \quad v_3(x) = (x-3)^2, \quad v_4(x) = (x-4)^2$$

zatímco funkce u_1, u_2, u_3, u_4 jsou lineárně nezávislé

$$u_1(x) = (x-1)^3, \quad u_2(x) = (x-2)^3, \quad u_3(x) = (x-3)^3, \quad u_4(x) = (x-4)^3$$

a rozhodněte, zda jsou lineárně závislé funkce s_1, s_2, s_3, s_4

$$s_1(x) = \sin(x-1),\ s_2(x) = \sin(x-2),\ s_3(x) = \sin(x-3),\ s_4(x) = \sin(x-4)$$

3.6 Úlohy na procvičení

1. Ukažte platnost vzorců 1, 2, 4 z kapitoly 3.2.
2. Napište vzorce 5, 6 z kapitoly 3.2 (tj. spočítejte derivace v integrálu).
3. Nalezněte primitivní funkci k $x \mapsto \frac{1}{x^2-6x+12}$. Určete interval k této primitivní funkci.
4. Určete primitivní funkci k $x \mapsto \frac{8}{x^2-4}$ na $(-2, 2)$.
5. Určete primitivní funkci k $x \mapsto \frac{x^4}{(x^2+4)^2}$ na $\mathbb{R}$.

Kapitola 4

Metoda substituce

Princip substituce vysvětlíme na následujícím příkladu. Rovnici (4.1) neumíme vyřešit přímo, a tak ji v A převedeme na kvadratickou rovnici, kterou vyřešit umíme. Zpětnou substitucí se pak v C od kořenů kvadratické rovnice dostaneme ke kořenům rovnice (4.1).

$$4^x - 2^{x+3} + 12 = 0 \tag{4.1}$$

A. Substitucí $t = 2^x$ převedeme rovnici (4.1) na kvadratickou rovnici

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

B. Vyřešíme kvadratickou rovnici: dostaneme $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

C. Vrátíme se k původní rovnici: řešení x_1, x_2 vypočteme ze vztahů

$$2^{x_1} = 2 \qquad 2^{x_2} = 6$$

Dostaneme $x_1 = 1$, $x_2 = \log 6/\log 2$.

U integrálů je mechanismus obdobný: integrál, který neumíme spočítat přímo, převedeme substitucí na integrál, který spočítat umíme a pak se zpětnou substitucí vrátíme k výsledku původního integrálu.

4.1 Substituce a derivace složené funkce

Substituce v integrálu je odvozená od pravidla pro derivování složené funkce, proto si toto pravidlo připomeneme

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x)$$

Uvažujme funkce

$$F : y \mapsto \exp(y) \qquad g : x \mapsto x^2$$

tedy $F(y) = \exp(y)$, $g(x) = x^2$ a $F(g(x)) = \exp(x^2)$. Pravidlo pro derivaci složené funkce dá

$$(\exp(x^2))' = \exp(x^2)\, 2x$$

Označme f derivaci funkce F, tedy $F' = f$. Pak dostaneme obecnější pravidlo

$$(F(x^2))' = f(x^2)\, 2x$$

Máme-li spočítat integrál $\int f(x^2) 2x \mathrm{d}x$, stačí, když spočítáme integrál $\int f(y) \mathrm{d}y$, a do výsledku dosadíme $y = x^2$.

Podobně pro $g(x) = x^3$ dostaneme

$$(F(x^3))' = f(x^3)\, 3x^2$$

a tedy při výpočtu integrálu $\int f(x^3)\, 3x^2\, \mathrm{d}x$ stačí nalézt integrál $\int f(y)\, \mathrm{d}y$ a do výsledku dosadit $y = x^3$.

Podobně pro $g(x) = \sin(x)$ je

$$(F(\sin(x))' = f(\sin(x))\, \cos(x)$$

a při výpočtu integrálu $\int f(\sin(x))\, \cos(x)\, \mathrm{d}x$ stačí nalézt integrál $\int f(y)\, \mathrm{d}y$ a do výsledku dosadit $y = \cos(x)$.

Odtud plyne, že problém výpočtu primitivní funkce (4.3) lze převést substitucí $t = g(x)$ na problém (4.2)

$$t \mapsto F(t) \quad \text{je primitivní funkcí} \quad t \mapsto f(t) \tag{4.2}$$

$$x \mapsto F(g(x)) \quad \text{je primitivní funkcí} \quad x \mapsto f(g(x))g'(x) \tag{4.3}$$

Vodítkem při provádění substituce pro nás bude vyjádření derivace jako podílu nekonečně malých přírůstků – vztah mezi proměnnými $t = g(x)$ zderivujeme

$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

a odtud vyjádříme $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}t = g'(x)\, \mathrm{d}x$$

V problémech (4.2), (4.3) tedy dosazujeme $t = g(x),\ \mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x$, a tím převádíme integrál I_x na integrál I_t

$$I_t = \int f(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_x = \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Zpětná substituce pak je $t = g(x)$.

Druhá možnost substituce je převést integrál I_t na integrál I_x. Pak pro zpětnou substituci potřebujeme inverzní funkci $x = g^{-1}(t)$.

Dostaneme tak dvě substituční metody

1. Integrál $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$ převedeme substitucí na integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, který spočítáme. Výsledek označíme $F(t)$ a dosadíme do něj zpětnou substituci. Dostaneme $F(g(x))$. Symbolicky celý proces zapíšeme

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \dashrightarrow \int f(t)\,\mathrm{d}t \dashrightarrow F(t) \dashrightarrow F(g(x))$$

2. Integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ převedeme substitucí na integrál $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$, který spočítáme. Výsledek označíme $G(x)$ a dosadíme do něj zpětnou substituci. Dostaneme $G(g^{-1}(t))$. Symbolicky celý proces zapíšeme

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t \dashrightarrow \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \dashrightarrow G(x) \dashrightarrow G(g^{-1}(t))$$

4.2 Příklady na obě substituční metody

Spočítáme příklady, na které můžeme použít obě substituční metody a poukážeme na rozdíly mezi metodami. V dalších kapitolách pak uvedeme příklady, které lze spočítat jen jednou z uvedených metod.

Příklad.
Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{\exp(3t)+1}{\exp(2t)+1}\,\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

Použijeme substituci $x = \exp(t)$ – zde je podstatné, že $\exp(2t) = x^2$ a podobně lze upravit $\exp(3t)$. Pomocí inverzní funkce vyjádříme $t = \log(x)$ a zderivujeme: $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Dosadíme do integrálu (4.4)

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{4.5}$$

Dostali jsme integrál z racionální funkce – vydělíme a rozložíme na parciální zlomky (uvádíme výsledek, výpočet necháme na čtenáři)

$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}$$

zintegrujeme

$$\int 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x + \log(x) - \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

a dosadíme zpět $x = \exp(t)$. Dostaneme

$$\int \frac{\exp(3t)+1}{\exp(2t)+1}\,\mathrm{d}t = \exp(t) + t - \operatorname{arctg}(\exp(t)) - \frac{1}{2}\log(\exp(2t)+1)$$

Chceme-li udělat zkoušku, zderivujeme výsledek a upravíme.

Pro použití druhé metody integrál napíšeme s integrační proměnnou x. Děláme to ve shodě s předchozí kapitolou a jen proto, aby se čtenář lépe zorientoval. Při běžných výpočtech na označení proměnné nezáleží.

$$\int \frac{\exp(3x)+1}{\exp(2x)+1}\,\mathrm{d}x \tag{4.6}$$

Použijeme stejnou substituci $t = \exp(x)$, ale tentokrát nebudeme počítat inverzní funkci. Substituční vztah zderivujeme $\mathrm{d}t = \exp(x)\,\mathrm{d}x$ a integrál (4.6) upravíme do tvaru vhodného pro substituci – rozšíříme výrazem $\exp(x)$

$$\int \frac{\exp(3x)+1}{(\exp(2x)+1)\exp(x)}\exp(x)\,\mathrm{d}x$$

a provedeme substituci

$$\int \frac{t^3+1}{(t^2+1)t}\,\mathrm{d}t$$

Vidíme, že jsme dostali stejný integrál jako při použití předchozí metody, viz (4.5). To nepřekvapuje, protože substituce je stejná, liší se jen způsobem provedení. Proto i výsledek bude stejný

$$\int \frac{\exp(3x)+1}{\exp(2x)+1}\,\mathrm{d}x = \exp(x) + x - \operatorname{arctg}(\exp(x)) - \frac{1}{2}\log(\exp(2x)+1)$$

Srovnání metod. V první metodě jsme *potřebovali* inverzní funkci k substituci. Provedení substituce bylo *přímočaré*. Ve druhé jsme *nepotřebovali* inverzní funkci k substituci. Před provedením substituce jsme integrál *upravili*.

Za zmínku stojí, že v jedné metodě derivujeme starou proměnnou podle nové a ve druhé novou proměnnou podle staré.

Zdůrazněme, že je potřeba ovládat obě metody, protože některé integrály je možné spočítat jen jednou z nich. Takové příklady uvedeme v dalších kapitolách. Zde ještě zintegrujeme jednu funkci oběma metodami.

Příklad.
Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{t}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{4.7}$$

K odstrannění odmocniny použijeme substituci $t = x^2$, ze které odvodíme $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, dosadíme do integrálu a upravíme

$$\int \frac{x^2}{1+\sqrt{x^2}} 2x\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x^3}{1+x}\,\mathrm{d}x \tag{4.8}$$

Poznamenejme, že jsme upravili $\sqrt{x^2}$ na x (tj. pro kladné x, viz poznámka pod příkladem). Dostali jsme integrál z racionální funkce. Vydělením dostaneme

$$\frac{2x^3}{1+x} = 2x^2 - 2x + 2 - \frac{2}{1+x}$$

a zintegrováním

$$\int 2x^2 - 2x + 2 - \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x - 2\log(1+x)$$

Po zpětné substituci $x = \sqrt{t}$ dostaneme výsledek

$$\int \frac{t}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - t + 2\sqrt{t} - 2\log(1+\sqrt{t}) \tag{4.9}$$

Chceme-li provést zkoušku, zderivujeme výsledek a upravíme.

Poznamenejme, že jsme v tomto příkladě mohli vyjádřit x jinak, a sice $x = -\sqrt{t}$. Pak bychom v (4.8) upravili $\sqrt{x^2} = -x$. Po zpětné substituci by výsledek vyšel stejně jako v (4.9).

Integrál (4.7) spočítáme stejnou substitucí, ale druhou metodou

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad t=\sqrt{x}$$

Zderivujeme: $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, před substitucí integrál upravíme – rozšíříme výrazem $2\sqrt{x}$

$$\int \frac{2x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

a provedeme substituci

$$\int \frac{2t^2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Další výpočet je stejný jako nahoře a vede ke stejnému výsledku.

4.3 Úlohy na procvičení

1. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$y \mapsto \frac{1+\sqrt{y^3}}{y^2+y}$$

Výpočet proveďte dvakrát – substitucemi $z=\sqrt{y}$, $u=-\sqrt{y}$. Substituci proveďte metodou podle svého výběru (možné jsou obě). Po výpočtu udělejte zkoušku.

2. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$y \mapsto \frac{1}{1+\exp(y)}$$

Substituci proveďte oběma metodami. Po výpočtu udělejte zkoušku.

3. Zvolte substituci tak, abyste se zbavili odmocnin, tj. převeďte integrál substitucí na integrál z racionální funkce. Integrál poté spočítejte a udělejte zkoušku.

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}}\,\mathrm{d}y$$

NÁVOD: použijte substituci $y=z^n$ pro vhodně zvolené n.

4.4 Substituce bez inverzní funkce

U tohoto druhu substituce je potřeba získat cit pro volbu substituce. Budeme proto vysvětlovat, co nás k její volbě vede.

1. Spočítáme integrál $\int x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

   Zvolíme substituci $y = x^2$. Proč je vhodné zvolit zrovna tuto substituci vysvětlíme později, nejdřív integrál spočítáme. Zderivujeme substituci $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$, upravíme integrál tak aby obsahoval výraz $2x\,\mathrm{d}x$, za který dosadíme $\mathrm{d}y$ a dosadíme i y za x^2

   $$\int x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{2}\exp(-x^2)\,2x\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{2}\exp(-y)\,\mathrm{d}y$$

   Zintegrujeme – použijeme přitom lineární substituci, kterou se postupně, jak budeme získávat zkušenosti, naučíme dělat zpaměti

   $$\int \tfrac{1}{2}\exp(-y)\,\mathrm{d}y = -\tfrac{1}{2}\exp(-y)$$

   Zpětnou substitucí získáme výsledek

   $$\int x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\exp(-x^2)$$

   Zderivováním výsledku uděláme zkoušku.

   Poznámka: Integrál jsme mohli spočítat i substitucí $t = -x^2$, dostali bychom integrál z $\exp(t)$ a ušetřili si lineární substituci. Při výběru substituce je podstatné, že integrujeme součin výrazů, z nichž jeden obsahuje x^2 (snadno do něj za x^2 dosadíme) a druhý je derivací x^2, až na faktor 2, který snadno získáme úpravou. Stejná substituce by byla možná i v případě, že by pod integrálem bylo x^3 místo x

   $$\int x^3\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}x^2\exp(-x^2)\,2x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int y\exp(-y)\,\mathrm{d}y$$

   Integrál po substituci bychom spočítali metodou integrace po částech (per partes), kterou probereme v jedné z dalších kapitol. Místo x^3 by mohla být jakákoliv mocnina s lichým exponentem. Pro mocninu se sudým exponentem naopak substituce není vhodná. Po úpravě bychom dostali

   $$\int x^2\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{2}x\exp(-x^2)\,2x\,\mathrm{d}x$$

Zde by nám dělalo problém dosazení za x. Sice by bylo možné substituci dokončit volbou $x = \sqrt{y}$, případně $x = -\sqrt{y}$ podle toho, na jakém intervalu primitivní funkci hledáme, ale dostali bychom integrál obsahující odmocninu, který neumíme spočítat

$$\int \tfrac{1}{2}x \exp(-x^2)\, 2x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int \sqrt{y} \exp(-y) \,\mathrm{d}y$$

2. Spočítáme integrál $\int \frac{x}{x^2+5} \,\mathrm{d}x$.

Stejně jako v předchozím příkladě máme součin dvou výrazů, kde jeden obsahuje x^2 a druhý snadno můžeme upravit na $2x$, tedy derivaci x^2. Zvolíme proto substituci stejně jako v předchozím příkladě: $y = x^2$, $\mathrm{d}y = 2x \,\mathrm{d}x$. Upravíme integrál a provedeme substituci

$$\int \frac{x}{x^2+5} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2(x^2+5)} 2x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2(y+5)} \,\mathrm{d}y$$

Zintegrujeme (opět za pomoci lineární substituce, kterou provedeme zpaměti)

$$\int \frac{1}{2(y+5)} \,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} \log|y+5|$$

Zpětnou substitucí získáme výsledek

$$\int \frac{x}{x^2+5} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \log(x^2+5)$$

Opět provedeme zkoušku zderivováním.

Poznámky:

Mohli jsme použít substituci $t = x^2 + 5$ a vyhnuli bychom se lineární substituci.

Také jsme tento integrál mohli spočítat dosazením do vzorce z kapitoly o integraci parciálních zlomků. Zde jsme výpočet provedli kvůli procvičení.

Otázka: Proč jsme mohli vynechat ve výsledku absolutní hodnotu?

3. Spočítáme integrál $\int \frac{x^2}{x^6+1} \,\mathrm{d}x$.

Všimneme si, že x^2 je až na faktor 3 derivací x^3 a že x^6 snadno upravíme do tvaru vhodného pro substituci za x^3

$$\int \frac{x^2}{x^6+1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3((x^3)^2+1)} 3x^2 \,\mathrm{d}x$$

Po substituci $y = x^3$ dostaneme integrál

$$\int \frac{1}{3(y^2+1)}\,\mathrm{d}y$$

Spočítáme ho

$$\int \frac{1}{3(y^2+1)}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(y)$$

Zpětnou substitucí získáme výsledek

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)$$

Zderivováním uděláme zkoušku.

Poznámka: Kdybychom si nevšimli možnosti substituce, mohli bychom integrál spočítat rozkladem na parciální zlomky. Začali bychom rozkladem jmenovatele na součin

$$\begin{aligned} x^6+1 &= (x^2)^3+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1) \\ &= (x^2+1)[(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2] \\ &= (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1) \end{aligned}$$

Pak bychom provedli rozklad

$$\frac{x^2}{x^6+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-\sqrt{3}x+1}$$

a spočítali $A=0$, $B=-1/3$, $C=0$, $D=1/6$, $E=0$, $F=1/6$. Dva zlomky bychom doplnili na čtverec

$$\frac{1}{x^2\pm\sqrt{3}x+1} = \frac{1}{(x\pm\sqrt{3}/2)^2+1/4}$$

a zintegrovali (integrace je jen dosazení do vzorců, úpravy typu $\frac{1}{6}\frac{1}{1/2} = \frac{1}{3}$ a $(x+\sqrt{3}/2)/(1/2) = 2x+\sqrt{3}$ necháme na čtenáři)

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(x) + \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})$$

Výsledek se na první pohled liší od výsledku nahoře. Z jednoznačnosti integrálu plyne, že se liší maximálně o konstantu. Dosazením $x = 0$

a použitím toho, že arkustangens je lichá funkce, tedy $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}(\sqrt{3})$ dostaneme hodnotu této konstanty – zjistíme, že je rovna nule a výsledky se tedy rovnají.
Ověřit, že se rovnají, můžeme například použitím součtového vzorce pro tangens $\operatorname{tg}(x+y) = (\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y))/(1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y))$ a z něj odvozeného vztahu $\operatorname{arctg}(X) + \operatorname{arctg}(Y) = \operatorname{arctg}(\frac{X+Y}{1-XY})$

4. Spočítáme integrál $\int x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

   Všimneme si zase, že x^3 je až na faktor 4 rovno derivaci x^4. Můžeme tedy integrál upravit na

$$\int x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{4}\sqrt{x^4+1}\,4x^3\,\mathrm{d}x$$

   a provést substituci $y = x^4$

$$\int \tfrac{1}{4}\sqrt{x^4+1}\,4x^3\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{4}\sqrt{y+1}\,\mathrm{d}y$$

   Integrál spočítáme lineární substitucí

$$\int \tfrac{1}{4}\sqrt{y+1}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{4}\int (y+1)^{1/2} = \tfrac{1}{4}\tfrac{2}{3}(y+1)^{3/2} = \tfrac{1}{6}\sqrt{(y+1)^3}$$

   Zpětnou substitucí získáme výsledek

$$\int x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}\sqrt{(x^4+1)^3}$$

   Zkoušku provedeme zderivováním výsledku.

   Poznámka: Mohli jsme použít substituci $t = x^4 + 1$.

5. Spočítáme integrál $\int \frac{1}{x(\log(x)+1)}\,\mathrm{d}x$.

   Všimneme si, že faktor $\frac{1}{x}$ je derivací logaritmu, a tedy po úpravě

$$\int \frac{1}{x(\log(x)+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\log(x)+1}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

   lze udělat substituci $y = \log(x),\ \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{\log(x)+1}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y$$

Integrál spočítáme lineární substitucí

$$\int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = \log|y+1|$$

Zpětnou substitucí dostaneme výsledek

$$\int \frac{1}{x(\log(x)+1)}\,\mathrm{d}x = \log|\log(x)+1|$$

6. Spočítáme integrál $\int(\sin(x))^5\,\mathrm{d}x$.

   V předchozích příkladech byla volba substituce intuitivní, tady tomu tak není. To, že níže uvedená substituce funguje, je založeno na úpravě

$$\begin{aligned}(\sin(x))^5 &= (\sin(x))^4\sin(x) = ((\sin(x))^2)^2\sin(x) \\ &= (1-(\cos(x))^2)^2\sin(x)\end{aligned} \tag{4.10}$$

   Zde si všimneme, že sinus je až na znaménko derivací kosinu, a tedy lze provést substituci $y=\cos(x),\ \mathrm{d}y = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int(\sin(x))^5 = -\int(1-(\cos(x))^2)^2(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = -\int(1-y^2)^2\,\mathrm{d}y$$

   Před integrací umocníme závorku

$$-\int(1-y^2)^2\,\mathrm{d}y = -\int 1-2y^2+y^4\,\mathrm{d}y = -y+\tfrac{2}{3}y^3-\tfrac{1}{5}y^5$$

   a zpětnou substitucí získáme výsledek

$$\int(\sin(x))^5\,\mathrm{d}x = -\cos(x)+\tfrac{2}{3}(\cos(x))^3-\tfrac{1}{5}(\cos(x))^5$$

   Pokud bychom chtěli udělat zkoušku, tak výsledek zderivujeme a pak upravíme podobně jako v (4.10).

   Poznámka: Mocniny goniometrických funkcí se obvykle zapisují takto

$$\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)+\tfrac{2}{3}\cos^3(x)-\tfrac{1}{5}\cos^5(x)$$

   Tento zápis je přehlednější, takže ho doporučujeme používat. Zápis typu $(\sin(x))^2$ jsme zde zvolili proto, že význam obvyklého zápisu $\sin^2(x)$ by mohl též znamenat zkratku zápisu $\sin(\sin(x))$ a nechtěli jsme čtenáře mást.

7. Spočítáme integrál $\int (\cos(x))^9 \, dx$ a budeme používat zápis $\int \cos^9(x) \, dx$. V předchozím příkladu bylo podstatné, že sinus byl umocněn na lichou mocninu, úpravou (4.10) jsme dostali sudou mocninu a do té jsme snadno dosadili ze vzorce $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Zde máme lichou mocninu kosinu a nabízí se analogická úprava

$$\cos^9(x) = \cos^8(x)\cos(x) = (1-\sin^2(x))^4 \cos(x) \tag{4.11}$$

a tedy substituce $y = \sin(x), \; dy = \cos(x) \, dx$

$$\int \cos^9(x) \; dx = \int (1-\sin^2(x))^4 \; \cos(x) \, dx = \int (1-y^2)^4 \, dy$$

Před integrací umocníme dvojčlen v závorce

$$\int (1-y^2)^4 \, dy = \int 1-4y^2+6y^4-4y^6+y^8 \, dy = y - \tfrac{4}{3}y^3 + \tfrac{6}{5}y^5 - \tfrac{4}{7}y^7 + \tfrac{1}{9}y^9$$

Výsledek získáme zpětnou substitucí

$$\int \cos^9(x) \, dx = \sin(x) - \tfrac{4}{3}\sin^3(x) + \tfrac{6}{5}\sin^5(x) - \tfrac{4}{7}\sin^7(x) + \tfrac{1}{9}\sin^9(x)$$

Zkoušku provedeme zderivováním výsledku a úpravou (4.11).

4.5 Úlohy na procvičení

1. Nalezněte primitivní funkce k funkcím

$$x \mapsto \frac{x}{(x^2+4)^2} \qquad x \mapsto \frac{x}{(x^2+3)^3} \qquad x \mapsto \frac{x^3}{(x^2+4)^3}$$

Poznámka: Použijte jakoukoliv metodu z této nebo z předchozích kapitol.

2. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$x \mapsto \sin^4(x)\cos^5(x)$$

3. Nalezněte primitivní funkci a udělejte zkoušku

$$x \mapsto \frac{\log(x)+1}{x(\log(x)-1)}$$

4. Nalezněte primitivní funkci a udělejte zkoušku

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{2 - \cos(x)}}$$

(*5) Ukažte, že výsledky příkladu 3 jsou stejné.

4.6 Substituce s inverzní funkcí

Ukážeme použití substituční metody na následujících integrálech. Volba substituce je intuitivní jen v prvním případě, v dalších případech je daná zkušeností starších generací matematiků. Podstatné je, že všechny substituce vedou na integrál z racionální funkce, který umíme počítat. Cílem tohoto odstavce není *umět zvolit substituci*, budeme se soustředit jen na to, jak *substituci provést*.

O tom, jak zvolit substituci, pojednáme na konci kapitoly.

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x \qquad \int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

1. Spočítáme integrál $\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

   Použijeme substituci $y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$.
   Vyjádříme inverzní funkci (podrobnosti necháme na čtenáři) $x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$.
   Spočítáme derivaci (podrobnosti jsou opět na čtenáři) $\mathrm{d}x = \frac{4y}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$.
   Provedeme substituci

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int y\,\frac{4y}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$$

   Spočítáme integrál (viz jedna z předchozích kapitol)

$$\int \frac{4y^2}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{arctg}(y) - \frac{2y}{y^2+1}$$

   Provedeme zpětnou substituci

$$2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \frac{2\sqrt{(x+1)/(1-x)}}{(x+1)/(1-x)+1}$$

a upravíme na (opět podrobnosti necháme na čtenáři)

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \sqrt{1-x^2}$$

Dostaneme tak výsledek

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\, \mathrm{d}x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \sqrt{1-x^2}$$

Zkoušku opět spočítáme zderivováním a úpravou.

2. Máme spočítat integrál $\int \sqrt{1+4x^2}\, \mathrm{d}x$.
   Použijeme substituci
   $$y = 2x + \sqrt{1+4x^2} \tag{4.12}$$
   Úpravami vyjádříme inverzní funkci
   $$x = \frac{y^2-1}{4y} \tag{4.13}$$
   Spočítáme derivaci, vztah je vhodné upravit na $x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4y}$, pak je $\mathrm{d}x = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4y^2})\, \mathrm{d}y$ a po úpravě zpátky na zlomek $\mathrm{d}x = \frac{y^2+1}{4y^2}\, \mathrm{d}y$
   Nyní potřebujeme provést substituci. To můžeme udělat mechanicky
   $$\sqrt{1+4x^2} = \sqrt{1 + 4\left(\frac{y^2-1}{4y}\right)^2}$$
   a pak si užít úpravu výrazu. Další možností je všimnout si, že ze vztahu (4.12) lze vyjádřit odmocninu $\sqrt{4x^2+1} = y - 2x$ a na pravé straně dosadit z (4.13). Po úpravě dostaneme
   $$\sqrt{4x^2+1} = y - 2\frac{y^2-1}{4y} = \frac{2y^2-(y^2-1)}{2y} = \frac{y^2+1}{2y}$$
   Provedeme substituci
   $$\int \sqrt{4x^2+1}\, \mathrm{d}x = \int \frac{y^2+1}{2y} \frac{y^2+1}{4y^2}\, \mathrm{d}y$$

Spočítáme integrál

$$\begin{aligned}\int \frac{(y^2+1)^2}{8y^3}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{y^4+2y^2+1}{8y^3}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y}{8}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{8y^3}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{y^2}{16}+\frac{1}{4}\log(y)-\frac{1}{16y^2}\end{aligned}$$

Provedeme zpětnou substituci

$$\frac{(2x+\sqrt{4x^2+1})^2}{16}+\frac{1}{4}\log(2x+\sqrt{4x^2+1})-\frac{1}{16(2x+\sqrt{4x^2+1})^2}$$

Výsledek je ještě možné upravit. Všimneme si, že platí – úprava známá z výpočtu limit –

$$\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2x-\sqrt{4x^2+1}}{4x^2-(4x^2+1)} = \frac{2x-\sqrt{4x^2+1}}{-1} = -2x+\sqrt{4x^2+1}$$

Pomocí této úpravy je možné upravit

$$(2x+\sqrt{4x^2+1})^2-\frac{1}{(2x+\sqrt{4x^2+1})^2} = (2x+\sqrt{4x^2+1})^2-(-2x+\sqrt{4x^2+1})^2$$

a posléze s použitím vzorců $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

$$(2x+\sqrt{4x^2+1})^2-(-2x+\sqrt{4x^2+1})^2 = 4x\sqrt{4x^2+1}$$

Dosazením do výsledku integrálu dostaneme

$$\int \sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{4}\log(2x+\sqrt{4x^2+1})$$

Chcete-li si procvičit derivování a úpravu výrazů, proveďte zkoušku.

3. Spočítáme integrál $\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

   Použijeme substituci $y=\mathrm{tg}(x/2)$ a vztahy, které dostanete jako hvězdičkový příklad k odvození:

$$\sin(x)=\frac{2y}{y^2+1} \qquad \cos(x)=\frac{1-y^2}{1+y^2} \tag{4.14}$$

Spočítáme inverzní funkci k substituci. Tady je dobré poznamenat, že integrovaná funkce je definovaná na $\mathbb{R}$, ale na tomto intervalu nemá zvolená substituce inverzní funkci. Námi spočítanou inverzní funkci: $x = 2\,\mathrm{arctg}(y)$ dostaneme po zúžení intervalu pro x na $x \in (-\pi, \pi)$. Z inverzní funkce pak vyjádříme $\mathrm{d}x = \frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$ a provedeme substituci

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+(1-y^2)/(1+y^2)}\frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$$

upravíme (úpravy necháme na čtenáři) a zintegrujeme (zde jen dosadíme do vzorce)

$$\int \frac{1}{2+(1-y^2)/(1+y^2)}\frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{y^2+3}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{\sqrt{3}}$$

Výsledek dostaneme zpětnou substitucí

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}$$

Ještě poznámku k intervalu pro x: V úvodní kapitole jsme zaváděli primitivní funkci na intervalu, ale většinou jsme se o něj při výpočtu nestarali. Tady jsme našli primitivní funkci na intervalu daného substitucí, tedy na $(-\pi, \pi)$. Integrovaná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, a má tedy na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Všimneme si, že je integrovaná funkce periodická a náš výsledek snadno použijeme i na další intervaly. Primitivní funkci na $\mathbb{R}$ pak získáme „slepením“ primitivních funkcí přes jednotlivé intervaly. Pozor ale na rychlý a nesprávný závěr, že výsledná primitivní funkce bude také periodická.

Chceme-li udělat zkoušku, zderivujeme výsledek a upravíme – při úpravě použijeme vzorce

$$\sin^2(x/2) = \frac{1-\cos(x)}{2} \qquad \cos^2(x/2) = \frac{1+\cos(x)}{2} \tag{4.15}$$

4. Spočítáme integrál

$$\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Mohli bychom použít substituci stejnou jako v minulém příkladě a dostali bychom integrál

$$\int \frac{1}{1+(2y/(y^2+1))^2}\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

který bychom nejdříve rozšířili výrazem $1 + y^2$, vydělili a zintegrovali

$$\int \frac{2y^2+2}{5y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{5} + \frac{8}{25}\frac{1}{y^2+1/5}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{5}y + \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctg}(y\sqrt{5})$$

Zpětnou substitucí bychom dostali

$$\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\operatorname{tg}(x/2) + \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctg}(\sqrt{5}\operatorname{tg}(x/2))$$

V tomto případě je možné použít i substituci $t = \operatorname{tg}(x)$ a vztahy

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)} \\
\cos^2(x) &= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)} \\
\sin(x)\cos(x) &= \frac{\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Integrál po substituci potom bude

$$\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

po úpravě

$$\int \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t$$

po integraci (vytkneme polovinu a dosadíme do vzorce)

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)$$

a po zpětné substituci

$$\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}(x))$$

Primitivní funkci jsme našli na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Na $\mathbb{R}$ ji rozšíříme podobně jako v předchozím příkladě.

Zkoušku opět uděláme zderivováním a úpravou.

4.6.1 Poznámky k substitucím

Použité substituce nazýváme Eulerovy. Na integrály obsahující výraz s odmocninou z kvadratického výrazu $\sqrt{ax^2+bx+c}$ je možné použít substituce

$$y = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+bx+c} \text{ v případě } a > 0 \tag{4.17}$$

$$yx + \sqrt{c} = \sqrt{ax^2+bx+c} \text{ v případě } c > 0 \tag{4.18}$$

$$y = \sqrt{(x-x_1)/(x-x_2)} \text{ v případě, že má výraz } ax^2+bx+c \text{ dva reálné kořeny } x_1, x_2 \tag{4.19}$$

My jsme použili substituci (4.17) na příklad 1 a substituci (4.19) na příklad 2.

Substituce za $\mathrm{tg}(x/2)$ je spolu se vztahy (4.14) univerzální substituce pro integrály obsahující goniometrické funkce. Substituci za $\mathrm{tg}(x)$ je vhodné použít v případě, že není nutné ve vztazích (4.16) odmocňovat. Takovým byl i příklad 4.

TODO: NÁSLEDUJÍCÍ ÚVAHU JSEM DOPLNILA I DO PŘÍKLADŮ. ZVÁŽÍM, JESTLI TO CELÉ JEŠTĚ NEPŘEFORMULOVAT.

Všimněte si, že integrované funkce v příkladech 3, 4 jsou spojité na $\mathbb{R}$ a mají tedy primitivní funkci na $\mathbb{R}$. My jsme našli primitivní funkci jen na intervalu $(-\pi, \pi)$ v příkladu 3 a na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ v příkladu 4. Všimněte si, že jsou integrované funkce periodické a my jsme našli primitivní funkci na jedné jejich periodě. Primitivní funkci na $\mathbb{R}$ pak získáme „slepením“ primitivních funkcí přes jednotlivé intervaly. Pozor ale na rychlý a nesprávný závěr, že primitivní funkce bude také periodická. Další možné substituce jsou za $\sin(x)$ a případně $\cos(x)$. Jejich použití jsme vysvětlili v kapitole 4.4.

4.7 Úlohy na procvičení

1. Nalezněte primitivní funkci k funkci $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ na intervalu $(-1,1)$ a udělejte zkoušku.
   NÁVOD: Použijte substituci $y = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$ a integrovanou funkci upravte a dosaďte jen za x v závorce; za odmocninu dosaďte y.
   $$\sqrt{1-x^2} = (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
2. Nalezněte primitivní funkci k $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ a udělejte zkoušku.

(*3) Odvoďte vztahy (4.14) a (4.16).
V textu jsme spočítali primitivní funkci k $y = 1/(2 + \cos(x))$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Popište primitivní funkci na $\mathbb{R}$.

4. Nalezněte primitivní funkci k funkci f. Na jakém intervalu jste primitivní funkci nalezli? Má funkce f primitivní funkci na větším intervalu?

$$f : x \mapsto \tfrac{1}{2+\sin(x)-\cos(x)}$$

5. Převeďte integrál vhodnou substitucí na integrál z racionální funkce. Na jakém intervalu má integrovaná funkce funkci primitivní a na jakém ji vámi zvolenou substitucí vypočtete?

$$\int \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{\sin^2(x) + \cos(x) + 2}\,\mathrm{d}x$$