Vlastnosti Riemannova a Newtonova integrálu

V dalším předpokládáme, že $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, v případě Newtonova integrálu připouštíme i $a = -\infty$, $b = +\infty$. U Newtonova integrálu navíc předpokládáme, že nabývá konečných hodnot (pro Riemannův integrál je to samozřejmé).

- *Aditivita vzhledem k integračnímu oboru*: pro $c \in (a, b)$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Aditivita vzhledem k integrované funkci*:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Linearita vzhledem k integrované funkci*: pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Vlastnosti Riemannova a Newtonova integrálu – pokračování

- *Nezápornost integrálu*: pro funkci f nezápornou na intervalu $[a, b]$, tedy za předpokladu, že pro $x \in [a, b]$ platí $f(x) \geq 0$ je i integrál nezáporný, tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- *Monotonie integrálu*: pro $f \geq g$, tedy za předpokladu, že pro $x \in [a, b]$ platí $f(x) \geq g(x)$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Integrál z konstantní funkce*: pro $k \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b - a)$$

Poznámka pro šťouraly, vyskytnou-li se tací: pro $k = 0$ a $b - a = +\infty$ je levá strana rovna nule, zde má tedy smysl definovat $0 \times \infty = 0$.

Poznámky:

- První tři vlastnosti (obě aditivity a linearita) platí za předpokladu, že má alespoň jedna strana smysl. Zpravidla je používáme tak, že spočítáme pravou stranu a prohlásíme ji za výsledek levé strany.
- Rozmyslete si, že aditivita vzhledem k integračnímu oboru platí i v případě $c = a$ a $c = b$ za předpokladu, že definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Vyjádříte-li z pravé strany jeden z integrálů, například

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

  dosáhneme formálně stejného tvaru jako vlastnost na předchozím slajdu, pokud definujeme $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Aditivita vzhledem k integračnímu oboru je pro oba integrály přímočarým důsledkem jejich definice.

- Aditivita vzhledem k integrované funkci je pro Newtonův integrál přímočarým důsledkem jeho definice.
- Důkaz aditivity vzhledem k integrované funkci je pro Riemannův integrál méně přímočarý, věnujeme mu následující slajd.
- Linearita je pak pro oba integrály snadným důsledkem aditivity a definice integrálu. Rozmyslete si, že stačí ukázat

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- K aditivitě Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru:

  Z vlastností suprema a infima se odvodí nerovnosti

$$\begin{aligned} I_h(f+g,a,b) &\leq I_h(f,a,b)+I_h(g,a,b) \\ I_d(f+g,a,b) &\geq I_d(f,a,b)+I_d(g,a,b) \end{aligned}$$

  To, že v uvedených nerovnostech nemusí platit rovnost ukážeme volbou $f=d$ (Dirichletova funkce), $g=1-d$ (tedy 1 pro iracionální čísla a 0 pro racionální), pak je $f+g=1$. V prvním vztahu máme $1\leq 2$, ve druhém $1\geq 0$.

  Aditivitu pak dostaneme z nerovností

$$\begin{aligned} I_h(f,a,b)+I_h(g,a,b) \geq I_h(f+g,a,b) \geq I_d(f+g,a,b) \geq \\ \geq I_d(f,a,b)+I_d(g,a,b) \end{aligned}$$

  a z předpokladu $I_h(f,a,b)=I_d(f,a,b)$ a stejného vztahu pro funkci g.

- Monotonie pro Newtonův integrál je procvičení základů diferenciálního počtu: je-li f nezáporná na $[a, b]$ a F je její primitivní funkce, pak je F neklesající na $[a, b]$, a tedy $\lim_{x \to a^+} f(x) \leq \lim_{x \to b^-} f(x)$ a odtud plyne, že Newtonův integrál z f je na $[a, b]$ nezáporný.
- Nezápornost pro Riemannův integrál: všechny dolní i horní součty jsou nezáporné, tedy i jejich supremum a infimum je nezáporné, a tedy i Riemannův integrál je nezáporný.
- Pozitivita plyne pro oba integrály linearity a z monotonie: je-li $f \geq g$ na $[a, b]$, pak je $f - g \geq 0$ na $[a, b]$, z monotonie je pak $\int_a^b f - g \geq 0$, z linearity $\int_a^b f - g = \int_a^b f - \int_a^b g$ a odtud $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.