

# Newton-Leibnizova věta

*Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $I = [a, b]$ , funkce  $f$  je spojitá na  $I$ . Pak existují oba integrály a jsou si rovny*

$$(R) \int_a^b f = (N) \int_a^b f$$

Větu používáme při výpočtu. Při aplikacích nás zpravidla zajímá Riemannův integrál, ale místo něj počítáme Newtonův integrál. Věta nás ujišťuje, že takový postup je v případě spojitě funkce korektní.

Důkaz Newton-Leibnizovy věty provedeme v několika krocích:

1. Dokážeme existenci Riemannova integrálu nejen na intervalu  $[a, b]$ , ale i na intervalu  $[a, t]$  pro  $t \in (a, b)$ .
2. Bod 1 nám umožňuje definovat integrál s proměnnou horní mezí jako funkci  $R(t) = (R) \int_a^t f$ .
3. Ukážeme, že pro  $t \in (a, b)$  platí  $R'(t) = f(t)$ .
4. Z bodu 3 plyne, že funkce  $R$  je primitivní funkcí funkce  $f$  na intervalu  $(a, b)$ .
5. Limity této primitivní funkce jsou

$$\lim_{t \rightarrow b^-} R(t) = (R) \int_a^b f \quad \lim_{t \rightarrow a^+} R(t) = 0$$

6. Z bodu 5 plyne tvrzení věty.

Všimněte si, že při důkazu Newton-Leibnizovy věty zároveň dokážeme, že funkce spojitá na uzavřeném intervalu  $[a, b]$  má na otevřeném intervalu  $(a, b)$  primitivní funkci. Tvrzení platí i za slabších předpokladů – stačí, že je funkce spojitá na  $(a, b)$ , například  $\log$  má primitivní funkci na intervalu  $(0, 1)$ .

V případě, že je funkce  $f$  spojitá jen na otevřeném intervalu  $(a, b)$ , nemusí integrály existovat.

Riemannův integrál nebude existovat, pokud  $f$  není na  $(a, b)$  omezená.

V Newtonově integrálu nemusí existovat limity, případně je jejich rozdíl neurčitý výraz typu  $\infty - \infty$ .

K zformulování věty nám pomůže pojem *nevlastního Riemannova integrálu*:

Nechť  $a, b \in \mathbb{R}^*$  (připomeňme, že hvězdička značí  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ),  $a < b$ , funkce  $f$  je pro každé  $\beta \in (a, b)$  Riemannovsky integrovatelná na  $[a, \beta]$ . Nechť existuje limita

$$\lim_{\beta \rightarrow b^-} (R) \int_a^\beta f$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$* .

Podobně nazýváme nevlastním Riemannovým integrálem limitu

$$\lim_{\alpha \rightarrow a^+} (R) \int_{\alpha}^b f$$

případně dvojnásobnou limitu

$$\lim_{\beta \rightarrow b^-} \left( \lim_{\alpha \rightarrow a^+} (R) \int_{\alpha}^{\beta} f \right)$$

Nevlastní Riemannův integrál budeme značit stejně jako Riemannův.

## Newton-Leibnizova věta (pro nevlastní Riemannův integrál)

Nechť  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ , funkce  $f$  je spojitá na  $I = (a, b)$ . Pak na intervalu  $[a, b]$  pro funkci  $f$  existuje nevlastní Riemannův integrál právě když existuje Newtonův integrál a tyto integrály jsou si rovny

$$(R) \int_a^b f = (N) \int_a^b f$$