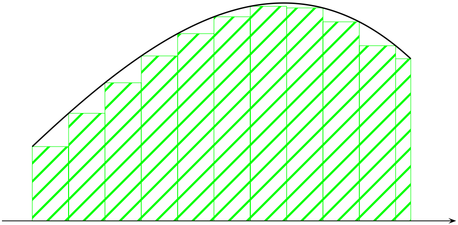
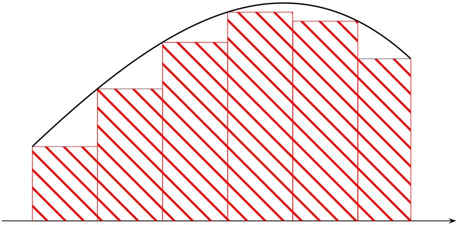
Cílem následujících obrázků je demonstrovat nerovnost $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$ pro libovolná dvě dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$. Odtud pak na dalších slajdech odvodíme nerovnost mezi dolním a horním Riemannovým integrálem.

$s(f, D_1)$



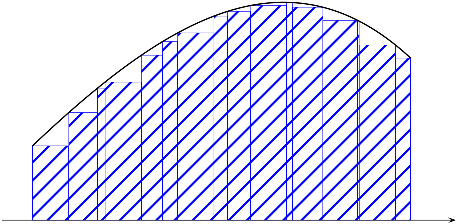
Cílem následujících obrázků je demonstrovat nerovnost $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$ pro libovolná dvě dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$. Odtud pak na dalších slajdech odvodíme nerovnost mezi dolním a horním Riemannovým integrálem.

$s(f, D_2)$



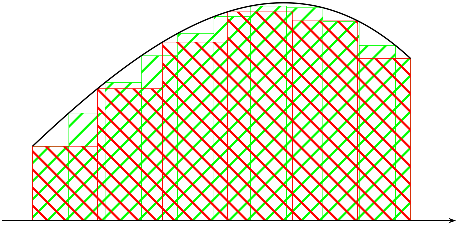
Cílem následujících obrázků je demonstrovat nerovnost $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$ pro libovolná dvě dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$. Odtud pak na dalších slajdech odvodíme nerovnost mezi dolním a horním Riemannovým integrálem.

Dolní součet pro dělení $D = D_1 \cup D_2$

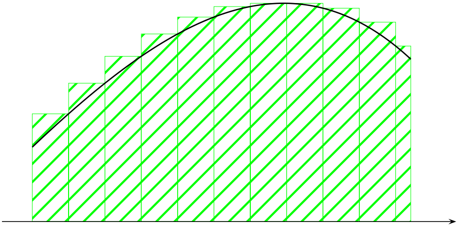


Cílem následujících obrázků je demonstrovat nerovnost $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$ pro libovolná dvě dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$. Odtud pak na dalších slajdech odvodíme nerovnost mezi dolním a horním Riemannovým integrálem.

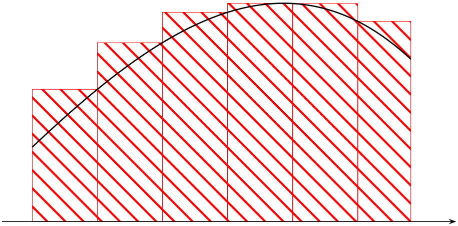
$s(f, D) \geq s(f, D_1)$, $s(f, D) \geq s(f, D_2)$



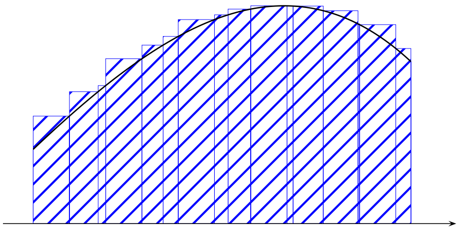
$S(f, D_1)$



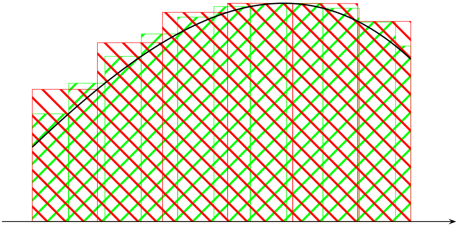
$S(f, D_2)$



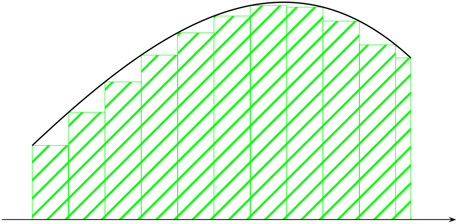
Horní součet pro dělení $D = D_1 \cup D_2$



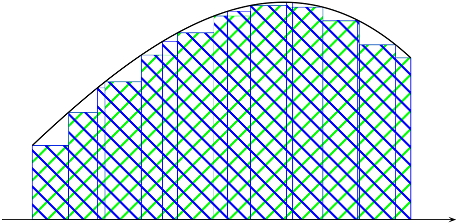
$S(f, D) \le S(f, D_1)$, $S(f, D) \le S(f, D_2)$



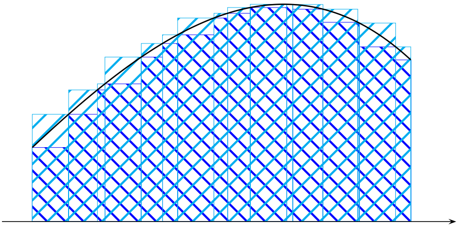
$s(f, D_1)$



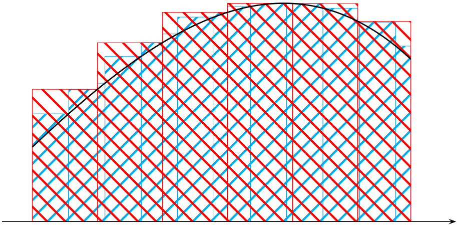
$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2)$



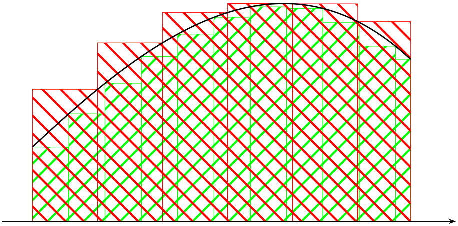
$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2)$$



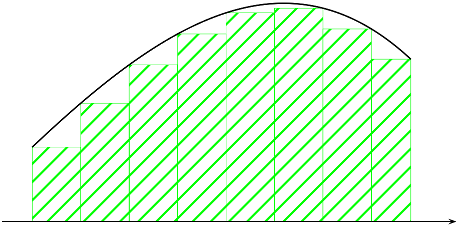
$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_2)$$



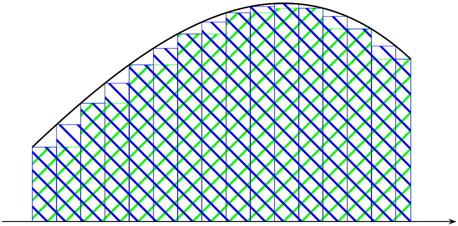
$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_2)$$



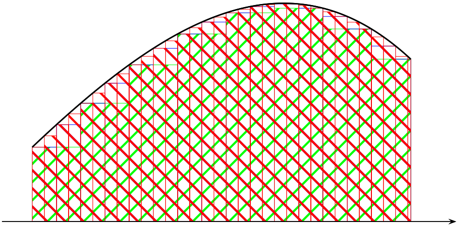
$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



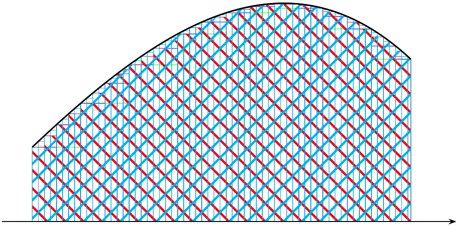
$$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



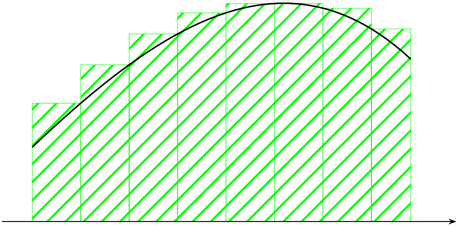
$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



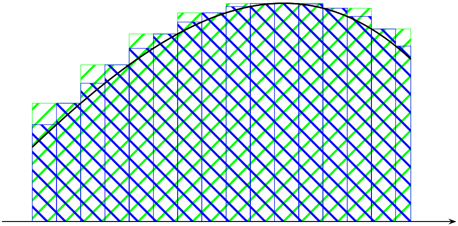
$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



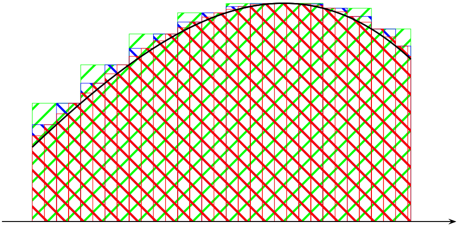
$$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



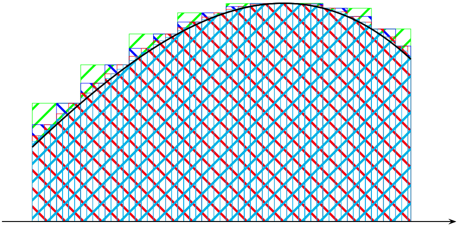
$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



Ukážeme, že $I_d(f, a, b) \leq I_h(f, a, b)$:

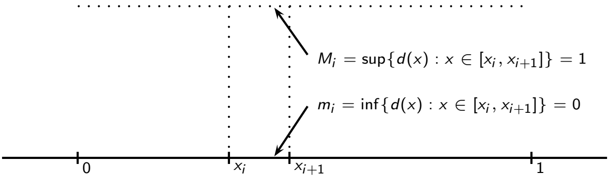
Ukázali jsme, že pro libovolná dvě dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ platí $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$. Proto je $s(f, D_1)$ dolní hranicí množiny horních součtů. Protože $I_h(f, a, b)$ je největší dolní hranicí množiny horních součtů, je $s(f, D_1) \leq I_h(f, a, b)$.

Protože tato nerovnost platí pro všechny dolní součty, je $I_h(f, a, b)$ horní hranicí množiny dolních součtů, a protože je $I_d(f, a, b)$ nejmenší horní hranicí množiny dolních součtů, je $I_d(f, a, b) \leq I_h(f, a, b)$.

Příklad funkce d (Dirichletova funkce), pro kterou je
$I_d(d, 0, 1) < I_h(d, 0, 1)$:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Každý neprázdný interval obsahuje racionální i iracionální číslo, proto je $m_i = 0$, $M_i = 1$ pro všechna i



a odtud plyne $s(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i = 0$ a $S(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = 1$ pro libovolné dělení D intervalu $[0, 1]$.

Definice Riemannova integrálu

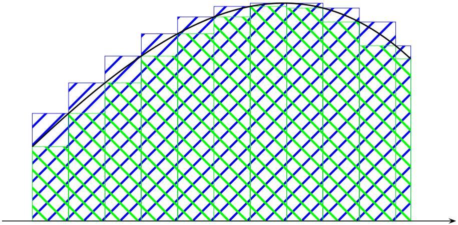
Funkci f definovanou a omezenou na intervalu $[a, b]$ nazveme *Riemannovsky integrovatelnou*, pokud se rovnají dolní a horní Riemannův integrál funkce f přes interval $[a, b]$, formálně zapsáno, pokud platí
$$I_d(f, a, b) = I_h(f, a, b).$$

Společnou hodnotu dolního a horního integrálu nazýváme *Riemannovým integrálem funkce f přes interval $[a, b]$*, značíme jej $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, někdy též $(R)\int_a^b f$ a pokud nehrozí záměna, tak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ či též $\int_a^b f$.

Lemma o Riemannovské integrovatelnosti

Funkce f je na intervalu $[a, b]$ Riemannovsky integrovatelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon \tag{1}$$



Obrázek demonstruje geometrický význam rozdílu horního a dolního součtu

$$S(f, D) - s(f, D)$$

Tento rozdíl je roven obsahu plochy vyšrafované modře a zároveň nevyšrafované zeleně.

Početně lze tento fakt demonstrovat na úpravě (budeme potřebovat v dalším textu):

$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(M_i - m_i)$

Hlavní myšlenka důkazu pak vychází z toho, že rozdíl mezi horním a dolním součtem je alespoň takový jako rozdíl mezi horním a dolním integrálem: $S(f,D) - s(f,D) \geq I_h(f,a,b) - I_d(f,a,b)$ a že volbou dostatečně jemného dělení D se můžeme libovolně blízko přiblížit rovnosti.

Důkaz lemmatu. Dolní Riemannův integrál $I_d(f,a,b)$ je supremem dolních součtů, proto pro dolní součet $s(f,D)$ platí $s(f,D) \leq I_d(f,a,b)$.
Podobně pro horní součet a horní integrál (infimum): $S(f,D) \geq I_h(f,a,b)$.
První nerovnost vynásobíme -1 a obě nerovnosti sečteme. Dostaneme

$$S(f,D) - s(f,D) \geq I_h(f,a,b) - I_d(f,a,b)$$

Odtud a z (1) plyne $I_h(f,a,b) - I_d(f,a,b) < \varepsilon$ pro libovolně malé $\varepsilon > 0$, zároveň víme, že rozdíl $I_h(f,a,b) - I_d(f,a,b)$ je nezáporný, proto je $I_h(f,a,b) - I_d(f,a,b) = 0$. Odtud plyne Riemannovská integrovatelnost funkce f na $[a,b]$.

Opačná implikace: je-li f Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, je $\int_a^b f = I_h(f, a, b) = I_d(f, a, b)$. Integrál $\int_a^b f$ je tedy zároveň supremem dolních součtů a infimem horních součtů. Zvolme $\varepsilon > 0$. $\int_a^b f - \varepsilon/2$ je menší než nejmenší horní hranice dolních součtů, není tedy horní hranicí dolních součtů a tedy existuje dělení D_1, že

$$s(f, D_1) > \int_a^b f - \varepsilon/2$$

Podobně z definice infima dostaneme existenci dělení D_2 splňující

$$S(f, D_2) < \int_a^b f + \varepsilon/2$$

Pro dělení $D = D_1 \cup D_2$ jsme ukázali dříve $s(f, D) \geq s(f, D_1)$, $S(f, D) \leq s(f, D_2)$. Odtud plyne

$$s(f, D) > \int_a^b f - \varepsilon/2 \qquad S(f, D) < \int_a^b f + \varepsilon/2$$

Levou nerovnost vynásobíme -1 a nerovnosti sečteme. Dostaneme

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$$

$\square$

Riemannovská integrovatelnost spojité funkce

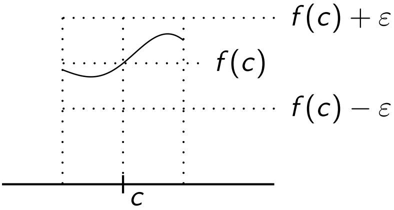
Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná

DŮKAZ. Zvolíme $\tilde{\varepsilon} > 0$ a níže dokážeme, že existuje dělení D intervalu $[a, b]$, takové, že

$$S(f, D) - s(f, D) < \tilde{\varepsilon},$$

tím bude důkaz za použití předchozího lemmatu dokončen.

Ze spojitosti v bodě $c \in [a, b]$ plyne ke každému $\varepsilon > 0$ existence $\delta > 0$, že pro $x \in U_\delta(c) \cap [a, b]$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(f(c))$.



Pro $x \in U_\delta(c)$ je $f(x) > f(c) - \varepsilon$, číslo napravo je tedy dolní hranice funkčních hodnot na $U_\delta(c)$, a proto je menší nebo rovno než největší dolní hranice, tedy

$$f(c) - \varepsilon \leq m \equiv \inf\{f(x) : x \in U_\delta(c)\} \tag{2}$$

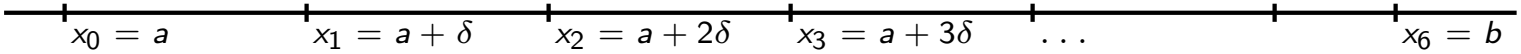
Podobně dostaneme nerovnost mezi horní hranicí $f(c)+\varepsilon$ a nejmenší horní hranicí M

$$f(c)+\varepsilon \geq M \equiv \sup\{f(x) : x \in U_\delta(c)\} \tag{3}$$

Nerovnost (2) vynásobíme -1 a sečteme s nerovnosti (3). Dostaneme

$$2\varepsilon \geq M - m$$

Za důkazem je poznámka o stejnoměrné spojitosti – uvidíme, že z té pro naši funkci plyne, že k danému $\varepsilon > 0$ je možné zvolit $\delta > 0$ stejné pro všechna $c \in [a, b]$.
Zvolme dělení o šířce intervalů rovné δ (kromě, možná, posledního dílku, který může být kratší.



Pak je $M_i - m_i \leq 2\varepsilon$. Zde použijeme úpravu za formulací lemmatu:

$$S(f,D) - s(f,D) = \cdots = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(M_i - m_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)2\varepsilon = 2(b-a)\varepsilon$$

Máme tedy nerovnost

$$S(f,D) - s(f,D) \leq 2(b-a)\varepsilon$$

a zbývá zvolit ε tak, aby platilo $2(b-a)\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$. Toho dosáhneme například volbou $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}/(3(b-a))$

$$S(f,D) - s(f,D) \leq 2(b-a)\varepsilon = 2(b-a)\frac{\tilde{\varepsilon}}{3(b-a)} = \frac{2\tilde{\varepsilon}}{3} < \tilde{\varepsilon}$$

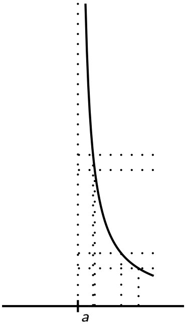
$\square$

Stejnoměrná spojitost funkce.

Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu I*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Na obrázku ukazujeme, že funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí být stejnoměrně spojitá.



Uvažujme interval (a, b) a funkci s nevlastní limitou v bodě a zprava. Na obrázku jsou na ose y vyznačena dvě okolí o stejné šířce (tedy odpovídající stejnému $\varepsilon > 0$). Funkce je na (a, b) spojitá, to zaručuje existenci okolí vyznačených na ose x. Z obrázku vidíme, že šířka okolí na ose x se s přibližováním k ose y zmenšuje a není tedy pravda, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ společné pro všechna okolí $U_\varepsilon(f(c))$.

Jiné je to s uzavřeným intervalem. Bez důkazu uvedeme znění věty:

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ *je na něm stejnoměrně spojitá.*

Tato věta je potřebná k důkazu Riemannovské integrovatelnosti funkce spojité na uzavřeném intervalu. A Riemannovská integrovatelnost je potřebná k důkazu existence primitivní funkce ke spojité funkci (tentokrát na otevřeném intervalu – ať nemusíme řešit zvlášť krajní body, kde by mělo smysl uvažovat jen jednostranné derivace).

Další věta je přímým důsledkem definic:

Funkce stejnoměrně spojitá na intervalu I *je na něm spojitá.*

Stejnoměrná spojitost zaručuje k $\varepsilon > 0$ stejné $\delta > 0$ pro všechna $c \in I$. Při důkazu spojitosti stačí k $c \in I$, $\varepsilon > 0$ vzít toto δ.