Kapitola 3

Integrace racionální funkce

Připomeneme na příkladech vybrané pojmy: *polynom* (*mnohočlen*), *racionální funkce*, *ryze lomená racionální funkce*, *parciální zlomek*.

Racionální funkce je například

$$\frac{x^5}{x^4-1}$$

Vydělením dostaneme součet *polynomu* a *ryze lomené funkce* – ta má v čitateli polynom nižšího stupně než ve jmenovateli.

$$\frac{x^5}{x^4-1} = x + \frac{x}{x^4-1}$$

Parciálními zlomky pak v tomto případě jsou

$$\frac{1}{x+1} \quad \frac{1}{x-1} \quad \frac{1}{x^2+1} \quad \frac{x}{x^2+1}$$

Parciální zlomky budeme rozlišovat podle kořenů jmenovatele – podle toho, zda jsou kořeny reálné nebo komplexní a zda jsou jednonásobné či vícenásobné.

1. Jednonásobný reálný kořen: $\frac{1}{x+a}$
2. Vícenásobný reálný kořen s násobností $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $\frac{1}{(x+a)^n}$
3. Jednonásobné komplexní kořeny: $\frac{\dots}{x^2+px+q}$

4. Vícenásobné komplexní kořeny s násobností $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $\frac{\dots}{(x^2+px+q)^n}$

V případě komplexních kořenů je standardně v čitateli parciálního zlomku buď 1 nebo x. My ukážeme, že je možné čitatele volit vhodněji s ohledem na snažší výpočet integrálu.

3.1 Rozklad na součet parciálních zlomků

Připomeneme na příkladu rozklad na součet parciálních zlomků. Vezmene funkci z předchozí kapitoly a vyjádříme ji jako lineární kombinaci parciálních zlomků

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x^2+1} + \frac{Dx}{x^2+1}$$

Naším úkolem je nyní spočítat takové hodnoty čísel A až D, aby se výrazy rovnaly pro všechna reálná x mimo kořeny jmenovatele. Roznásobíme společným jmenovatelem a dostaneme rovnici

$$x = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + C(x^2-1) + Dx(x^2-1)$$

Po úpravě – roznásobení závorek a vytknutí koeficientů A až D – dostaneme

$$x = A(x^3-x^2+x-1) + B(x^3+x^2+x+1) + C(x^2-1) + D(x^3-x)$$

Připomeňme, že hledáme hodnoty čísel A až D takových, že daná rovnice je splněná pro nekonečně mnoho x. To je možné jen pokud se všechny členy na levé a pravé straně odečtou a po úpravě vyjde rovnice $0 = 0$. Odtud dostaneme rovnice pro A až D – porovnáme koeficienty u stejných mocnin na levé a pravé straně.

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + D \\ 0 &= -A + B + C \\ 1 &= A + B - D \\ 0 &= -A + B - C \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme některou metod lineární algebry a dostaneme $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$.

Odtud dostaneme rozklad – vyjádření složitějšího zlomku jako součet jednodušších výrazů.

$$\frac{x^5}{x^4-1} = x + \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/4}{x-1} + \frac{-x/2}{x^2+1}$$

Příklad s násobnými komplexními kořeny. Rozložíme na parciální zlomky a následně zintegrujeme výraz

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}$$

Standardní parciální zlomky jsou

$$\frac{\tilde{A}}{x^2+1} + \frac{\tilde{B}x}{x^2+1} + \frac{\tilde{C}}{(x^2+1)^2} + \frac{\tilde{D}x}{(x^2+1)^2} \tag{3.1}$$

Protože tyto zlomky budeme integrovat, je vhodnější zvolit parciální zlomky jinak

$$\frac{A}{x^2+1} + \frac{Bx}{x^2+1} + C\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' + D\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' \tag{3.2}$$

Zderivujme výrazy a napišme rovnici

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{-2Cx}{(x^2+1)^2} + \frac{D(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Po úpravě dostaneme

$$4x^2 = A(x^2+1) + Bx(x^2+1) - 2Cx + D(1-x^2)$$

odtud dostaneme soustavu rovnic pro čísla A až D

$$\begin{aligned} 0 &= B \\ 4 &= A - D \\ 0 &= B - 2C \\ 0 &= A + D \end{aligned}$$

Soustava má řešení $A = 2$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2$. Odtud dostaneme parciální zlomky

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1} + \left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)'$$

a integrál

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{2x}{x^2+1}$$

Poznamenejme, že vztahy (3.1), (3.2) se liší volbou jiné báze vektorového prostoru výrazů.

3.2 Integrace parciálních zlomků

Napíšeme několik vzorců. V kapitole úloh na procvičení pak necháme čtenáři vzorce zderivováním ověřit.

1. $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x = \log|x+a|$
2. $\int \frac{1}{(x+a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}, n > 1$
3. $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$ pro jmenovatele bez reálných kořenů. Jmenovatele doplníme na čtverec a substitucí převedeme na integrál $\int \frac{1}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y$. Viz příklad dole.
4. $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \log(x^2+px+q)$ také pro jmenovatele bez reálných kořenů.

Poznámka. V případě 4 lze vzorec použít i pro případ s reálnými kořeny ve jmenovateli, pokud dáme logaritmovaný výraz do absolutní hodnoty. V případě 3 také můžeme postup použít s reálnými kořeny ve jmenovateli, ale dojdeme k integrálu $\int \frac{1}{y^2-a^2}\,\mathrm{d}y$.

Příklad na doplnění na čtverec. Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x$$

Doplníme na čtverec výraz ve jmenovateli $x^2+3x = (x+3/2)^2 - 9/4$, dosadíme do integrálu a přitom sečteme $-9/4+4$. Dostaneme $\int \frac{1}{(x+3/2)^2+7/4}\,\mathrm{d}x$. Nyní použijeme vzorec $\int \frac{1}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}$ pro $a = \sqrt{7/4} = \sqrt{7}/2$ a se substitucí $y = x + 3/2$. Dostaneme výsledek (který můžeme zkontrolovat zderivováním)

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$$

Ještě zbývá uvést vzorce pro případ, že má jmenovatel násobné komplexní kořeny. Kladné přirozené n je násobnost těchto kořenů.

5. $\int \left(\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\right)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(x^2+px+q)^n}$
6. $\int \left(\frac{x}{(x^2+px+q)^n}\right)'\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+px+q)^n}$

3.3 Úlohy na procvičení

1. Ukažte platnost vzorců 1, 2, 4 z kapitoly 3.2.

2. Napište vzorce 5, 6 z kapitoly 3.2 (tj. spočítejte derivace v integrálu).

3. Nalezněte primitivní funkci k $x \mapsto \frac{1}{x^2-6x+12}$. Určete interval k této primitivní funkci.

4. Určete primitivní funkci k $x \mapsto \frac{8}{x^2-4}$ na $(-2, 2)$.

5. Určete primitivní funkci k $x \mapsto \frac{x^4}{(x^2+4)^2}$ na $\mathbb{R}$.