Úlohy z cyklometrických funkcí

1a Řešte následující rovnice na intervalu $(-\pi, 5\pi/2]$. Nepoužívejte kalkulačku. Výsledky napište pomocí hodnot cyklometrických funkcí.

(a) $\sin x = 0.9$

(b) $\cos x = -0.1$

(c) $\operatorname{tg} x = -5$

(d) $\operatorname{cotg} x = 2$

*1b (a) $\cos(2x) = 0.6$

(b) $\cos(5 - 2x) = 0.3$

2. Určete definiční obor elementární funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f(x) = \frac{\sin(1-x^2)\arccos(1-x^2)}{\operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})}$$

3. Napište definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě a ukažte, že funkce $x \mapsto \operatorname{arccotg} x$ má vlastní limitu v bodě $+\infty$. Definici nemusíte psát pro obecný případ, stačí vhodný typ na zadaný příklad.

4. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit následující funkce na $\mathbb{R}$ a případně jakou hodnotou

$$\begin{array}{ll} x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x) & x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x) \\ x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x^2) & x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x^2) \\ x \mapsto (\operatorname{arctg}(1/x))^2 & x \mapsto (\operatorname{arccotg}(1/x))^2 \end{array}$$

5. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 1^+} \cos(\operatorname{arctg}(\tfrac{1}{x-1}))$$

změna 14. 3. – místo $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} \arcsin(1/\operatorname{arctg}(x))$

počítejte $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} \arcsin(1/(1+\operatorname{tg}(x)))$

(*6) Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(\sin^2 x) \qquad \lim_{x\to 0} \cos \operatorname{sgn} x \qquad \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x^2 \sin^2 \tfrac{1}{x})$$

7. Odvoďte vztahy pro derivace funkcí arcsin, arccos, arctg, arccotg.

8a Určete definiční obor funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$ a nalezněte maximální intervaly, na nichž je f monotonní. Umíte vyřešit úlohu bez použití derivace?

8b Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

9a Určete definiční obor funkce f a nalezněte maximální intervaly, na nichž je f monotonní
$$f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$$

9b Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

10a Určete definiční obor funkce f a nalezněte maximální intervaly, na nichž je f monotonní
$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$$

10b Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

11. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f
$$f(x) = 2\operatorname{arctg}(1/x^2)$$

12a Vypočtěte jednostranné i oboustrannou limitu funkce f v bodě jedna
$$f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{x}{x^2-1}$$

12b Určete obraz intervalu $I = (1, +\infty)$ ve funkci f.

12c Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

13. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f
$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x}$$

14. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f
$$f(x) = \arcsin\sqrt{x-x^2}$$

15a Určete definiční obor funkce f
$$f : x \mapsto \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

15b Vypočtěte derivaci funkce f.

*15c Nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí.

*15d Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

(*16) Pro funkce f, g vypočtěte derivaci a určete definiční obor funkce i její derivace. Pro funkci f navíc určete maximální intervaly, na nichž je monotonní.

(a)

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1} - 2 \operatorname{arctg} x$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

(*17) Načtrtněte grafy funkcí a vysvětlete, jak jste k nim došli. Nevíte-li si rady, nechte grafy vykreslit (třeba za použití WolframAlpha nebo desmosu) a přemýšlejte nad nimi.

$$\begin{array}{lll} x \mapsto \sin(\arcsin x) & x \mapsto \arcsin(\sin x) & x \mapsto \cos(\arcsin x) \\ x \mapsto \arcsin(\cos x) & x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) & x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \\ x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) & x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x) & \end{array}$$

18. Napište Taylorův polynom stupně tři v bodě nula funkcí arkussinus a arkuskosinus.

19. Napište Taylorův polynom stupně tři v bodě nula funkcí arkustangens a arkuskotangens.

20a Vypočtěte za použití lineární aproximace funkcí vhodným Taylorovým polynomem přibližné hodnoty čísel a poté přibližné hodnoty porovnejte s přesnými hodnotami.

$$\operatorname{tg} 0.2, \qquad \arcsin(1 - \sqrt{0.9})$$

20b

$$\sqrt{3.9} \arcsin 0.1$$