Úlohy z exponenciálních a logaritmických funkcí

1. Mocniny reálného čísla a s exponentem $n \in \mathbb{N}$ jsou definovány:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \quad \text{pro } n = 1 \\ a^n &= a^{n-1}a \quad \text{pro } n \geq 2 \end{aligned}$$

   Dokažte matematickou indukcí, že pro $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a^{n+m} = a^n a^m$$

(*2) Zamyslete se nad tím, proč je $2^0 = 1$. Pro které základy platí $a^0 = 1$?
Proč je $2^{1/2} = \sqrt{2}$, proč je $2^{-1} = 1/2$?
A obecně: proč je $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ a $a^{-p} = 1/a^p$?
Kde je chyba v: $-1 = (-1)^3 = (-1)^{6/2} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$?

   Vycházíme ze situace, kdy jste se naučili pracovat s mocninami s kladným přirozeným exponentem a chcete je nějakým rozumným způsobem zobecnit na případ s reálným exponentem. Výše uvažujeme racionální exponent. Další otázka by mohla být: jaký význam dáme mocnině s exponentem $\sqrt{2}$? Například $2^{\sqrt{2}}$.

3. Do jednoho obrázku načrtněte grafy *mocninných* funkcí $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x\sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$. Vysvětlete, kde a jak se na těchto grafech projeví monotonie *exponenciální* funkce.

4. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit funkce na $\mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp(-1/x) \qquad x \mapsto \exp(-1/x^6)$$

5. Zjistěte na kterém z intervalů nabývá funkce f svého maxima a minima a určete jejich hodnoty.

$$I_1 = (0,1) \quad I_2 = (0,5) \quad I_3 = (-2,5) \quad I_4 = (-2,+\infty) \quad I_5 = \mathbb{R}$$

$$f : x \mapsto (x^2 - x - 1)\exp(-3x)$$

6. Určete obraz intervalů $I_1 = [0,3)$, $I_2 = [1,+\infty)$ ve funkci f

$$f : x \mapsto (x^2 - x - 1)\exp(-3x)$$

7. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto x^2 \exp(-x)$$

8. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto \exp(-x^2 + x)$$

9a Nalezněte maximální intervaly, na nichž je funkce monotonní. Hledejte intervaly maximální vzhledem k inkluzi, speciálně si rozmyslete, zda lze do intervalu zahrnout krajní body.

$$f(x) = (1 + x) \exp(-x^2)$$

*9b

$$f(x) = |1 + x| \exp(-x^2)$$

10. Napište příslušnou definici limity funkce a ukažte, že funkce $x \mapsto \log x$ této definici pro $x \to 0^+$ vyhovuje.

11. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{3x - 2 - x^2}}{\log(2 - x)}$$

12. Určete definiční obor funkce a nalezněte maximální intervaly, na nichž je funkce monotonní.

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

*12 Dokážete úlohu vyřešit bez použití derivace?

13. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto \sqrt{x} \log x$$

14. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto x \log \sqrt{x}$$

15. Vypočtěte limity funkce f v nule a $\pm\infty$

$$f(x) = \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x$$

16a Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v jeho bodě $[1, f(1)]$ a tečnu načrtněte

$$f : x \mapsto \exp(x - \sqrt{x})$$

16b V bodě $[-1, f(-1)]$

$$f : x \mapsto \log \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$$

(*17) Ukažte, že lze funkci f spojitě rozšířit do nuly a ukažte, že toto rozšíření má v nule všechny derivace nulové. Co to znamená pro Taylorovy polynomy této funkce v nule?

$$f : x \mapsto \exp(-1/x^2)$$

*18 Načrtněte grafy funkcí *hyperbolický sinus* a *hyperbolický kosinus*

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

19. Nechte si softwarem vykreslit grafy funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus. Nad grafy přemýšlejte o vlastnostech těchto funkcí (monotonie, sudost, lichost, limity v nekonečnech). Jak byste tyto vlastnosti zjistili bez pohledu na graf?

(*20) Vyjádřete pomocí logaritmu funkce

(a) *hyperbolický arkus sinus* $\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1}$

(b) *hyperbolický arkus kosinus* $\operatorname{arccosh} = (\cosh_{|[0,+\infty)})^{-1}$