Úlohy z goniometrických funkcí

1. Ze součtových vzorců pro sinus a kosinus odvoďte vzorce pro sinus a kosinus dvojnásobného argumentu.

2. Odvoďte vzorce pro sinus a kosinus polovičního argumentu.

3. Z rozdílových vzorců (6.18, 6.19, [JV], str. 173) odvoďte, že sinus je lichá funkce a kosinus je sudá funkce.

4a Zjistěte, zda je možné funkci f spojitě rozšířit, a pokud ano, načrtněte graf funkce f i graf jejího rozšíření.

$$f(x) = \cos \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$$

4b

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$$

5. Určete definiční obor elementární funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - x}\, \sin x}{x^2 + 4x}$$

6. Odvoďte vzorec pro derivaci sinu

   (a) S použitím spojitosti funkce kosinus v bodě nula. Upozorněte, kde a k čemu spojitost používáte.

   (b) Bez použití spojitosti. Použijte úpravu na straně 174 [JV].

7. Odvoďte vztahy pro derivace funkcí cos, tg, cotg.

8. Napište Taylorův polynom stupně dvanáct v bodě nula funkcí sinus a kosinus.

9. Napište Taylorův polynom stupně tři v bodě nula funkce tangens.

10a Vypočtěte obraz intervalu $I = (\pi/2, 5\pi/4)$ ve funkci f.

$$f(x) = \sin(x) + \cos^2(x)$$

Poznámka: $\cos^2(x)$ je zkrácený zápis $(\cos(x))^2$. Jak jinak by bylo možné tento výraz chápat?

*10b K obrazu $I_1 = f(I)$ vypočtěte vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$. Vzor hledejte jen na základní periodě funkce f.

10c Vypočtěte vzor intervalu $I = (0, 1]$ ve funkci f. Vzor hledejte jen na základní periodě funkce f.

11. Nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí. Hledejte intervaly maximální vzhledem k inkluzi, speciálně si rozmyslete, zda lze do intervalu zahrnout krajní body.

$$f(x) = \sin^3(x) + |\cos^3(x)|$$

12. Vypočtěte limity funkcí f, g v bodech 0, $+\infty$ a $-\infty$.

$$f(x) = \frac{\sin(5x - x^2)}{x} \qquad g(x) = \cos \frac{\sin(5x - x^2)}{x}$$

13a Vypočtěte limitu funkce f v bodě 1 a v bodech $\pm\infty$.

$$f(x) = \cos \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1}{\sqrt{x} - x}$$

13b V bodě 2 a $\pm\infty$.

$$f(x) = \sin \frac{(3 - \sqrt{x^2 + 5})(1 - \sqrt{2x^2 + 1})(8 - 3x^2)}{x^4 - 8x}$$

*14a Vypočtěte limitu funkce f v bodech 0, 3 a $+\infty$

$$f(x) = \frac{\sin((x^2 - 9)\pi)\cos((x^2 + 9)\pi)}{x^2 - 3x}$$

*14b Vypočtěte limitu funkce f v bodech 0, 3 a $+\infty$

$$f(x) = \frac{\cos((3/2 - x^2)\pi)\sin((x^2 + 9)\pi)}{x^2 - 3x}$$

*15. Vypočtěte limitu funkce f v bodě 0 zprava a v bodě $+\infty$.

$$f(x) = \frac{\sin(5x^2 - \sqrt{x^3})}{x(2x + 3\sqrt{x})}$$

*16. Vypočtěte limity funkce f v bodech 0, $+\infty$ a $-\infty$.

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x^2 - 5x^3)}{x^4}$$