

Úlohy na goniometrické funkce (středoškolské)

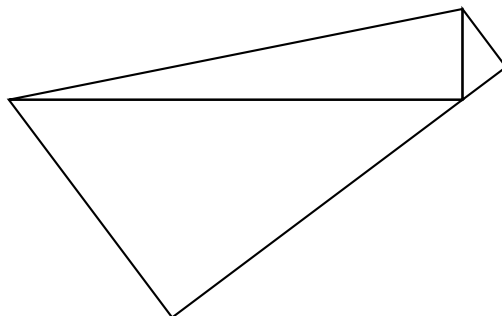
1. Odvoďte z trigonometrické definice hodnoty goniometrických funkcí pro $x = \pi/6$, $x = \pi/4$, $x = \pi/3$.

NÁVOD: použijte rovnostranný trojúhelník a rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

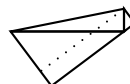
2. Odvoďte z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici hodnoty goniometrických funkcí v bodech 0 , $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $4\pi/3$, $7\pi/4$, $25\pi/6$.
3. Z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici odvoďte vzorce

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \cos(x + \pi) = -\cos x \quad \cos(x + \pi/2) = -\sin x$$

4. Na obrázku vidíte tři pravoúhlé trojúhelníky. Tři úhly na dolní pravé straně se skládají na přímý úhel. Označte velikosti úhlů nalevo α , β a pomocí α , β vyjádřete nejdříve velikosti ostatních úhlů a poté velikosti odvěsen těchto tří trojúhelníků, víte-li, že největší přepona má jednotkovou délku.



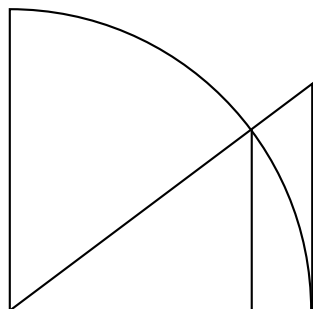
5. Použijte výsledky předchozího příkladu k odvození součtových vzorců pro sinus a kosinus.



NÁVOD: Do obrázku nahoře dokreslete odvěsnu:

POZNÁMKA: Od studentů mám vylepšení obrázku – doplňte jej na obdélník a případně pak obdélník postavte na jednu z jeho stran.

6. Na obrázku je čtvrtkruh o jednotkovém poloměru a dva podobné pravoúhlé trojúhelníky. Označte velikost společného úhlu těchto trojúhelníků φ a vyjádřete obsahy trojúhelníků jako funkci proměnné φ . Trojúhelníky vytínají na čtvrtkruhu výseč, vyjádřete obsah této výseče jako funkci proměnné φ . Z odvozených obsahů sestavte dvě nerovnosti a z každé nerovnosti vyjádřete odhad pro podíl $(\sin \varphi)/\varphi$.



7. Zjistěte, které číslo je větší, aniž byste je vyčíslili

- (a) $A_1 = \cos 20^\circ$, $A_2 = \cos 30^\circ$
 (b) $B_1 = \sin 100^\circ$, $B_2 = \cos 30^\circ$
 (c) $C_1 = 2^{-\sin 100^\circ}$, $C_2 = 2^{-\cos 30^\circ}$
 (d) $D_1 = \cos 1$, $D_2 = \cos 2$
 (e) $E_1 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\cos 1}}$, $E_2 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\cos 2}}$
 (f) $F_1 = \frac{1}{1-\sqrt{1+\cos 1}}$, $F_2 = \frac{1}{1-\sqrt{1+\cos 2}}$

8. Vypočtěte hodnoty goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens v bodě x , aniž byste vyčíslili x . Výsledky nevyčíslujte, nechte je v přesném tvaru s odmocninami a upravte je.

- (a) $\sin x = \frac{1}{3}$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
 (b) $\cos x = \frac{1}{4}$, $x \in \langle \pi, 2\pi \rangle$
 (c) $\cotg x = 2$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$
 (d) $\cos 2x = \frac{1}{4}$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$
 (e) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$
 (f) $\tg \frac{x}{2} = -4$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

- (*9) Ukažte, že pro libovolnou dvojici funkcí c, s platí: splňují-li na \mathbb{R} vztahy

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \quad (1)$$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y) \quad (2)$$

$$(s(x))^2 + (c(x))^2 = 1 \quad (3)$$

pak splňují na \mathbb{R} i vztahy

$$s(x - y) = s(x)c(y) - c(x)s(y) \quad (4)$$

$$c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y) \quad (5)$$

Poznámky:

Pro dvojici nenulových funkcí platí i opačná implikace.

Z úlohy plyne souvislost mezi zavedením goniometrických funkcí na přednášce a použitím věty 6.6.3 z [JV].

- (*10) Nalezněte dvojici funkcí c , s splňující součtové vzorce (1), (2), ale nesplňující (4), (5). Vysvětlete, jak odtud plyne, že v předchozí úloze není možné vynechat vztah (3).