Úlohy z (číselných) řad

1. Zvolte číslo s periodickým desetinným rozvojem a převeďte ho na podíl dvou celých čísel dvěma způsoby: jednak úpravami a dále sečtením nekonečné geometrické řady.

2. Zvolte dvě celá čísla a vypočtěte jejich podíl v desetinném tvaru. Pokud vám vyšel periodický desetinný rozvoj, tak se zamyslete, jestli to tak bude vždy. Přitom ukončený desetinný rozvoj považujeme také za periodický s periodou $\overline{0}$.

3. Určete, které z následujících řad mají součet a součty vypočtěte. Která z řad je konvergentní?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{3^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

4a Vypočtěte částečné součty a součet řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+3)}$$

*4b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+3}{k(k+1)(k+2)}$$

5a Zformulujte nutnou podmínku konvergence a napište, co z ní plyne pro následující řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2+1}{\sqrt{k^3}+1} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^3}+1}{k^2+1}$$

5b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{2^{2k}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

6. Srovnejte podle velikosti hodnoty výrazů pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

$$\frac{1}{k} \qquad \frac{1}{k^2} \qquad \frac{1}{k^5} \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{k^7}} \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{k^5}}$$

a napište co odtud plyne pro konvergenci řad

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^7}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k^5}}$$

7a Zdůvodněte, že má řada součet a zjistěte, zda je konvergentní.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k+\sqrt{k}}{k^4+\sqrt{k^5}}$$

*7b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-3k+k^5}{3+k^6}$$

*7c

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^6-2k^5-k^4-3k^2-20}{k^7}$$

8. Uvažujme posloupnost kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ takovou, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}/a_n < q$. Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí $a_n < a_1 q^{n-1}$.

9. Na první tabuli z 5. přednášky (1. 4. 2022) jsou za definicí absolutně konvergentní řady tři poznámky. Vysvětlete tyto poznámky i jejich zdůvodnění.

10a Zjistěte, které z následujících řad obsolutně konvergují

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3+4\sqrt{k}}{2^k} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2+\sqrt{2k+1}}{k^3+\sqrt{k^9+k+2}}$$

10b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3^k(\sqrt{k}+1)} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+3}{k^2+\sqrt{k^3+2k+3}}$$

11. Zjistěte, zda řada absolutně konverguje a ukažte, že konverguje.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{(k+\sqrt{k})3^k}$$

12. Ověřte předpoklady Leibnizova kritéria pro následující řady. Co odtud plyne pro konvergenci a absolutní konvergenci řad?

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2\sqrt{k}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}(1+\tfrac{1}{k})$$