Úlohy ke zkoušce z AN2

17. května 2022

1. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f(x) = \frac{\arcsin(x/3)\,\mathrm{arctg}(1 - \sqrt{x+3})}{x^2 + 2x}$$

2. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^3+1} - x - 1)(\sqrt{x^4+3} - 2)}{(x-2)\log(x)}$$

3. Napište příslušnou definici limity funkce a ukažte, že funkce $x \mapsto \mathrm{arccotg}(x)$ této definici vyhovuje v bodě $-\infty$.

4. Napište příslušnou definici limity funkce a ukažte, že funkce $x \mapsto \log(x)$ této definici vyhovuje v bodě 0 zprava.

5. Vypočtěte jednostranné i oboustrannou limitu funkce f v bodě mínus jedna

$$f(x) = \cos(0.5\,\mathrm{arctg}(\tfrac{1}{x+1}))$$

6. Vypočtěte jednostranné i oboustrannou limitu funkce f v bodě nula

$$f(x) = 2^{\mathrm{arccotg}(\log(x))}$$

7. Vypočtěte jednostranné i oboustrannou limitu funkce f v bodě jedna

$$f(x) = \mathrm{arccotg}\,\frac{x}{x^2 - 1}$$

8. Vypočtěte limity

$$\lim_{x \to \pi^-} 2^{\mathrm{cotg}\,x} \qquad \lim_{x \to = -\infty} \mathrm{cotg}(1.1^x)$$

9. Vypočtěte limity funkcí f, g v bodech 1, $+\infty$ a $-\infty$. Pro limity, které nevyčíslujete, alespoň určete, zda jsou kladné či záporné.

$$f(x) = \frac{\sin(4 - 5x + x^2)}{x^2 - 1} \qquad g(x) = \cos\frac{\sin(4 - 5x + x^2)}{x^2 - 1}$$

10. Vypočtěte limity funkce f v bodech $\pm\infty$

$$f(x) = \left(1 - \tfrac{2}{x}\right)^{2x-1}$$

11. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

$$f(x) = \arcsin\sqrt{3 - 2x^2}$$

12. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f(x) = \arccos\sqrt{3x - 3x^2}$$

13. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$$

14. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

$$f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{x}{x^2 - 1}$$

15. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x - 1}{x}$$

16. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f(x) = \sqrt{x}\log(x)$$

17. Určete obraz intervalu $I = (-\pi/2, \pi)$ ve funkci f. K obrazu $I_1 = f(I)$ určete vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$. Vzor hledejte jen na základní periodě funkce f.

$$f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$$

18. Vypočtěte vzor intervalu $I = (0, 1]$ ve funkci f. Vzor hledejte jen na základní periodě funkce f.

$$f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$$

19. Určete definiční obor a nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí. Hledejte intervaly maximální vzhledem k inkluzi, speciálně si rozmyslete, zda lze do intervalu zahrnout krajní body.

$$f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{x}{x^2 - 1}$$

20. Určete definiční obor a nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí. Hledejte intervaly maximální vzhledem k inkluzi, speciálně si rozmyslete, zda lze do intervalu zahrnout krajní body.

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

21. Určete definiční obor a nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí. Hledejte intervaly maximální vzhledem k inkluzi, speciálně si rozmyslete, zda lze do intervalu zahrnout krajní body.

$$f(x) = \sin^3(x) + \cos^3(x)$$

22. Napište Taylorův polynom stupně tři v bodě nula funkce f

$$f(x) = \arcsin(2x)$$

23. Napište Taylorův polynom stupně tři v bodě nula funkce f

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(3x)$$

24. Napište Taylorův polynom stupně tři v bodě $\pi/2$ funkce f

$$f(x) = \operatorname{cotg}(3x)$$

25. Napište Taylorův polynom stupně tři v bodě 1 funkce f

$$f(x) = \log \sqrt{x}$$

26. Vypočtěte za použití lineární aproximace funkcí vhodným Taylorovým polynomem přibližné hodnoty čísel a poté přibližné hodnoty porovnejte s přesnými hodnotami.

$$\arcsin 0.15, \qquad \operatorname{tg}(1 - \sqrt{1.2})$$

Poznámka: do písemky vám přesné (respektive zaokrouhlené) hodnoty napíšu.

27. Vypočtěte určité Newtonovy integrály

$$\int_{-\infty}^{0} 4x^2 \exp(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^\pi \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

28. Vypočtěte určité Newtonovy integrály

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{4-x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} - \log(x)\,\mathrm{d}x$$

29. Vypočtěte určité Newtonovy integrály

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^\pi \sqrt{x} + \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

30. Vypočtěte určité Newtonovy integrály

$$\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{3+x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^3 |x-1|\exp(x)\,\mathrm{d}x$$

31. Vypočtěte určitý Newtonův integrál

$$\int_0^2 (3x-1)^4 + \log(x)\,\mathrm{d}x$$

a následující integrál převeďte vhodnou substitucí na integrál z racionální funkce.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

32. Vypočtěte určitý Newtonův integrál (u obou integrálů jsem změnila mez, u prvního funkce arkussinus nebyla na intervalu definovaná, u druhého proto, aby bylo možno použít kromě substituce za sinus, kosinus tangens x pul i tangens)

$$\int_0^{1} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$$

a následující integrál převeďte vhodnou substitucí na integrál z racionální funkce.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos^3(x)}{\cos^4(x)+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

33. Vypočtěte určitý Newtonův integrál

$$\int_0^1 \log(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

a následující integrál převeďte vhodnou substitucí na integrál z racionální funkce (opět jsem změnila zadání – ze stejných důvodů jako v předchozím příkladě).

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)+\sin(x)\cos(x)+2\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

34. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC elementárně i pomocí integrálu.

$$A = [0,0], B = [3,1], C = [2,2]$$

35. Načrtněte obrazec O, odhadněte jeho obsah a poté obsah vypočtěte.

$$O = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -x^2 + 2x + 1 \geq y \geq x - 1\}$$

36. Vypočtěte délku křivky

$$l = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,4], y = \sqrt{x^3}\}$$

37. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce O okolo osy x.

$$O = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \geq y \geq 0\}$$

38. Vypočtěte obsah plochy vzniklé rotací úsečky AB okolo osy x. Výpočet proveďte pomocí integrálu i elementárně.

$$A = [0,2], B = [3,0]$$

39. Zjistěte, zda mají následující řady součet, zda jsou konvergentní a alespoň jednu z nich sečtěte.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 2k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt[3]{k^6 + 1}}{k^4}$$

40. Zjistěte, zda mají následující řady součet, zda jsou konvergentní a alespoň jednu z nich sečtěte.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{3^{k+2}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1}$$

41. Zjistěte, zda mají následující řady součet a zda jsou konvergentní.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k^6 + 1}}{k^4} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k 2^k}{3^{k+2}}$$