Požadavky ke zkoušce z AN2

26. května 2022

- **Goniometrické funkce.** Definice goniometrických funkcí: trigonometrická, na jednotkové kružnici, odvození součtových vzorců, odvození limity $\sin(x)/x$ v nule (a v nekonečnech, věta o limitě sevřené funkce), axiomatická definice goniometrických funkcí.
  Limity funkcí $(1-\cos(x))/x$, $(1-\cos(x))/x^2$ v nule. Odvození vzorců pro derivace goniometrických funkcí.
  Taylorův polynom funkcí sinus a kosinus v nule.
  Funkce $x^2\sin(1/x)$, její spojité rozšíření a derivace tohoto spojitého rozšíření.

- **Cyklometrické funkce.** Definice cyklometrických funkcí, použití na řešení rovnic $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{cotg} x = a$. Odvození vzorců pro derivace cyklometrických funkcí.

- **Exponenciální funkce.** Věta 6.3.3, axiomatická definice exponenciální funkce, geometrický význam limity $(\exp(x)-1)/x$ v nule. Odvození vlastností exponenciální funkce: kladnost, derivace, limity v nekonečnech, monotonie, obor hodnot.
  Odvození derivace exponenciální funkce, Taylorův polynom exponenciální funkce v nule.
  Funkce $\exp(-1/x^2)$, její spojité rozšíření a derivace tohoto spojitého rozšíření.

- **Logaritmická funkce.** Vlastnosti, ze kterých plyne existence inverzní funkce k exponenciální funkci. Definice logaritmu, definiční obor a obor hodnot, vztah k definičnímu oboru a oboru hodnot exponenciální funkce. Definice exponenciální funkce a logaritmu s obecným základem, monotonie exponenciální funkce s obecným základem a jak se projeví na grafu mocninných funkcí.
  Odvození derivace logaritmu, speciálně derivace v bodě jedna jako významná limita. Taylorův polynom logaritmické funkce v bodě jedna.

- **Limita** monotonní funkce jako supremum/infimum funkčních hodnot. Vysvětlení na grafech funkcí exp, log, artg, arcotg.
  Limita složené funkce: případ spojité vnější funkce (minulý semestr), případ ryze monotonní (tj. rostoucí/klesající) vnitřní funkce.

- **L'Hospitalovo pravidlo.** Použití na příkladech, předpoklady, za jakých se používá.

Významné limity: polynom/exponenciální funkce v nekonečnu, mocnina krát logaritmus v nule.

- **Řady čísel.** Základní pojmy: řada, člen řady, částečné součty řady, součet řady, konvergentní řada. Nutná podmínka konvergence řady i s důkazem. Geometrická řada, podmínka konvergence, částečné součty, součet i s odvozením.
  Řady s nezápornými členy, kritéria konvergence: srovnávací, limitní srovnávací, limitní podílové, integrální vše i s hlavní myšlenkou důkazu.
  Harmonická řada, její součet i s důkazem.
  Absolutně konvergentní řady, kritéria konvergence, konvergence absolutně konvergentní řady i s důkazem.
  Řady se střídavými znaménky (tzv. alternující řady), Leibnizovo kritérium konvergence i s důkazem (stačí ukázat na konkrétním příkladě).
  Přerovnání neabsolutně konvergentní řady, co se může stát s jejím součtem – stačí vysvětlení na příkladě – dělali jsme pro řadu $1 - 1/2 + 1/3 - \cdots + (-1)^{k+1}/k + \cdots$. Znalost faktu, že pro absolutně konvergentní řadu toto nastat nemůže (tedy absolutně konvergentní řada má po přerovnání stejný součet).
  Eulerovo číslo jako součet řady, odvození přes Taylorovu řadu a Lagrangeův tvar zbytku.
  Integrální kritérium konvergence řad, použití na řady $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha}$ pro $\alpha \in (1, 2)$ (pro ostatní α už víme ze srovnávacího kritéria).

- **Integrály.**
  Definice *primitivní funkce* na intervalu. Jednoznačnost primitivní funkce (až na konstantu) na intervalu. Existence primitivní funkce ke spojité funkci. Příklad funkce, která má primitivní funkci, ale není možné ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí.
  Metody výpočtu primitivní funkce: Metoda substituce a její odvození z derivace složené funkce, dvě verze substituce – s inverzní funkcí a bez inverzní funkce. Metoda per partes a její odvození z derivace součinu. Výpočet primitivní funkce k racionální funkci. Použití rekurentní formule na výpočet integrálu (my jsme ji použili na výpočet $\int \sin^n(x)$, $\int \cos^n(x)$, odvození těchto formulí).
  Riemannův integrál: dolní a horní součty, dolní a horní Riemannův integrál, Riemannovsky integrovatelná funkce. Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na něm Riemannovsky integrovatelná s hlavní myšlenkou důkazu. Příklad funkce, která není Riemannovsky integrovatelná (Dirichletova funkce), hodnota jejího dolního a horního Riemannova integrálu. Nevlastní Riemannův integrál.

Newtonův integrál: zobecněná primitivní funkce, definice Newtonova integrálu, věta o substituci i s důkazem.
Linearita (tj. vzorec pro integrál součtu a násobku) jako vlastnost integrálů (neurčitého, Riemannova určitého, Newtonova určitého), aditivita vzhledem k integračnímu oboru jako vlastnost určitých integrálů (Newtonova i Riemannova).
Newton-Leibnizova věta: funkce spojitá na uzavřeném intervalu má na něm Riemannův i Newtonův integrál a ty jsou si rovny i s hlavními myšlenkami důkazu.
Geometrické aplikace integrálu: obsah obrazce, délka křivky, objem a obsah pláště rotačně symetrického tělesa, vše i s odvozením, odvození obsahu pláště komolého kužele.