Newton-Leibnizova věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, *funkce* f *je spojitá na* I. *Pak existují oba integrály a jsou si rovny*

$$(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f \tag{1}$$

Větu používáme při výpočtu. Při aplikacích nás zpravidla zajímá Riemannův integrál, ale místo něj počítáme Newtonův integrál. Věta nás ujišťuje, že takový postup je v případě spojité funkce korektní.

Z aditivity integrálu vzhledem k intervalu plyne platnost (1) i pro funkci po částech spojitou (tedy spojitou na intervalech (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) pro $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$).

Newton-Leibnizova věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, *funkce* f *je spojitá na* I. *Pak existují oba integrály a jsou si rovny*

$$(R) \int_a^b f = (N) \int_a^b f \tag{1}$$

Větu používáme při výpočtu. Při aplikacích nás zpravidla zajímá Riemannův integrál, ale místo něj počítáme Newtonův integrál. Věta nás ujišťuje, že takový postup je v případě spojité funkce korektní.

Z aditivity integrálu vzhledem k intervalu plyne platnost (1) i pro funkci po částech spojitou (tedy spojitou na intervalech (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) pro $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$).

Newton-Leibnizova věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, funkce f je spojitá na I. Pak existují oba integrály a jsou si rovny

$$(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f \tag{1}$$

Větu používáme při výpočtu. Při aplikacích nás zpravidla zajímá Riemannův integrál, ale místo něj počítáme Newtonův integrál. Věta nás ujišťuje, že takový postup je v případě spojité funkce korektní.

Z aditivity integrálu vzhledem k intervalu plyne platnost (1) i pro funkci po částech spojitou (tedy spojitou na intervalech (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) pro $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$).

Důkaz Newton-Leibnizovy věty provedeme v několika krocích:

1. Dokážeme existenci Riemannova integrálu nejen na intervalu $[a, b]$, ale i na intervalu $[a, t]$ pro $t \in (a, b)$.
2. Bod 1 nám umožňuje definovat integrál s proměnnou horní mezí jako funkci $R(t) = (R) \int_a^t f$.
3. Ukážeme, že pro $t \in (a, b)$ platí $R'(t) = f(t)$.
4. Z bodu 3 plyne, že funkce R je primitivní funkcí funkce f na intervalu (a, b).
5. Limity této primitivní funkce jsou

$$\lim_{t \to b^-} R(t) = (R) \int_a^b f \qquad \lim_{t \to a^+} R(t) = 0$$

6. Z bodu 5 plyne tvrzení věty.

Všimněte si, že při důkazu Newton-Leibnizovy věty v bodu 3 ukážeme

$$(\forall t \in (a, b))(R'(t) = f(t))$$

tedy, že Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

$$R(t) = (R) \int_a^t f$$

je primitivní funkcí funkce f na intervalu (a, b).

Tvrzení platí i za slabších předpokladů – stačí, že je funkce spojitá na (a, b), například log má primitivní funkci na intervalu $(0, 1)$.

Všimněte si, že při důkazu Newton-Leibnizovy věty v bodu 3 ukážeme

$$(\forall t \in (a, b))(R'(t) = f(t))$$

tedy, že Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

$$R(t) = (R)\int_a^t f$$

je primitivní funkcí funkce f na intervalu (a, b).

Tvrzení platí i za slabších předpokladů – stačí, že je funkce spojitá na (a, b), například log má primitivní funkci na intervalu $(0, 1)$.

Všimněte si, že při důkazu Newton-Leibnizovy věty v bodu 3 ukážeme

$$(\forall t \in (a,b))(R'(t) = f(t))$$

tedy, že Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

$$R(t) = (R)\int_a^t f$$

je primitivní funkcí funkce f na intervalu (a,b).

Tvrzení platí i za slabších předpokladů – stačí, že je funkce spojitá na (a,b), například log má primitivní funkci na intervalu $(0,1)$.

V případě, že je funkce f spojitá jen na otevřeném intervalu (a, b), nemusí integrály existovat.

Riemannův integrál nebude existovat, pokud f není na (a, b) omezená.

V Newtonově integrálu nemusí existovat limity, případně je jejich rozdíl neurčitý výraz typu $\infty - \infty$.

K zformulování věty nám pomůže pojem *nevlastního Riemannova integrálu*:
Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ (připomeňme, že hvězdička značí $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), $a < b$, funkce f je pro každé $\beta \in (a, b)$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, \beta]$. Nechť existuje limita

$$\lim_{\beta \to b^-} (R) \int_a^\beta f$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$*.

V případě, že je funkce f spojitá jen na otevřeném intervalu (a, b), nemusí integrály existovat.

Riemannův integrál nebude existovat, pokud f není na (a, b) omezená.

V Newtonově integrálu nemusí existovat limity, případně je jejich rozdíl neurčitý výraz typu $\infty - \infty$.

K zformulování věty nám pomůže pojem *nevlastního Riemannova integrálu*:
Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ (připomeňme, že hvězdička značí $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), $a < b$, funkce f je pro každé $\beta \in (a, b)$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, \beta]$. Nechť existuje limita

$$\lim_{\beta \to b^-} (R) \int_a^\beta f$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a, b]$.

V případě, že je funkce f spojitá jen na otevřeném intervalu (a, b), nemusí integrály existovat.

Riemannův integrál nebude existovat, pokud f není na (a, b) omezená.

V Newtonově integrálu nemusí existovat limity, případně je jejich rozdíl neurčitý výraz typu $\infty - \infty$.

K zformulování věty nám pomůže pojem *nevlastního Riemannova integrálu*:
Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ (připomeňme, že hvězdička značí $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), $a < b$, funkce f je pro každé $\beta \in (a, b)$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, \beta]$. Nechť existuje limita

$$\lim_{\beta \to b^-} (R) \int_a^\beta f$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a, b]$.

V případě, že je funkce f spojitá jen na otevřeném intervalu (a, b), nemusí integrály existovat.

Riemannův integrál nebude existovat, pokud f není na (a, b) omezená.

V Newtonově integrálu nemusí existovat limity, případně je jejich rozdíl neurčitý výraz typu $\infty - \infty$.

K zformulování věty nám pomůže pojem *nevlastního Riemannova integrálu*:
Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ (připomeňme, že hvězdička značí $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), $a < b$, funkce f je pro každé $\beta \in (a, b)$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, \beta]$. Nechť existuje limita

$$\lim_{\beta \to b^-} (R) \int_a^\beta f$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$*.

Podobně nazýváme nevlastním Riemannovým integrálem limitu

$$\lim_{\alpha \to a^+} (R) \int_\alpha^b f$$

limitu v obou krajních bodech definujeme pomocí (libovolného) $c \in (a, b)$

$$\lim_{\alpha \to a^+} (R) \int_\alpha^c f + \lim_{\beta \to b^-} (R) \int_c^\beta f$$

Nevlastní Riemannův integrál budeme značit stejně jako Riemannův.

Newton-Leibnizova věta (pro nevlastní Riemannův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, *funkce* f *je spojitá na* $I = (a, b)$. *Pak na intervalu* $[a, b]$ *pro funkci* f *existuje nevlastní Riemannův integrál právě když existuje Newtonův integrál a tyto integrály jsou si rovny*

$$(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f$$