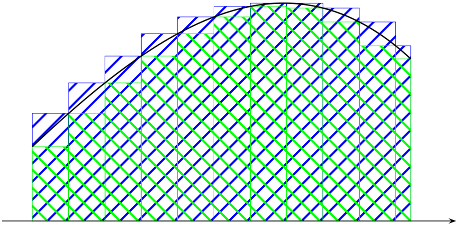
Lemma o Riemannovské integrovatelnosti

Funkce f je na intervalu $[a, b]$ Riemannovsky integrovatelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon \tag{1}$$



Obrázek demonstruje geometrický význam rozdílu horního a dolního součtu

$$S(f, D) - s(f, D)$$

Tento rozdíl je roven obsahu plochy vyšrafované modře a zároveň nevyšrafované zeleně.

Početně lze tento fakt demonstrovat na úpravě (budeme potřebovat v dalším textu):

$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(M_i - m_i)$

Hlavní myšlenka důkazu pak vychází z toho, že rozdíl mezi horním a dolním součtem je alespoň takový jako rozdíl mezi horním a dolním integrálem: $S(f, D) - s(f, D) \geq I_h(f, a, b) - I_d(f, a, b)$ a že volbou dostatečně jemného dělení D se můžeme libovolně blízko přiblížit rovnosti.

Důkaz lemmatu. Dolní Riemannův integrál $I_d(f, a, b)$ je supremem dolních součtů, proto pro dolní součet $s(f, D)$ platí $s(f, D) \leq I_d(f, a, b)$.
Podobně pro horní součet a horní integrál (infimum): $S(f, D) \geq I_h(f, a, b)$.
První nerovnost vynásobíme -1 a obě nerovnosti sečteme. Dostaneme

$$S(f, D) - s(f, D) \geq I_h(f, a, b) - I_d(f, a, b)$$

Odtud a z (1) plyne $I_h(f, a, b) - I_d(f, a, b) < \varepsilon$ pro libovolně malé $\varepsilon > 0$, zároveň víme, že rozdíl $I_h(f, a, b) - I_d(f, a, b)$ je nezáporný, proto je $I_h(f, a, b) - I_d(f, a, b) = 0$. Odtud plyne Riemannovská integrovatelnost funkce f na $[a, b]$.

Opačná implikace: je-li f Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, je $\int_a^b f = I_h(f, a, b) = I_d(f, a, b)$. Integrál $\int_a^b f$ je tedy zároveň supremem dolních součtů a infimem horních součtů. Zvolme $\varepsilon > 0$. $\int_a^b f - \varepsilon/2$ je menší než nejmenší horní hranice dolních součtů, není tedy horní hranicí dolních součtů a tedy existuje dělení D_1, že

$$s(f, D_1) > \int_a^b f - \varepsilon/2$$

Podobně z definice infima dostaneme existenci dělení D_2 splňující

$$S(f, D_2) < \int_a^b f + \varepsilon/2$$

Pro dělení $D = D_1 \cup D_2$ jsme ukázali dříve $s(f, D) \geq s(f, D_1)$, $S(f, D) \leq s(f, D_2)$. Odtud plyne

$$s(f, D) > \int_a^b f - \varepsilon/2 \qquad S(f, D) < \int_a^b f + \varepsilon/2$$

Levou nerovnost vynásobíme -1 a nerovnosti sečteme. Dostaneme

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$$

□

Riemannovská integrovatelnost spojité funkce

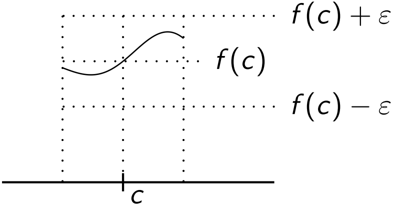
Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná

DŮKAZ. Zvolíme $\tilde{\varepsilon} > 0$ a níže dokážeme, že existuje dělení D intervalu $[a, b]$, takové, že

$$S(f, D) - s(f, D) < \tilde{\varepsilon},$$

tím bude důkaz za použití předchozího lemmatu dokončen.

Ze spojitosti v bodě $c \in [a, b]$ plyne ke každému $\varepsilon > 0$ existence $\delta > 0$, že pro $x \in U_\delta(c) \cap [a, b]$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(f(c))$.



Pro $x \in U_\delta(c)$ je $f(x) > f(c) - \varepsilon$, číslo napravo je tedy dolní hranice funkčních hodnot na $U_\delta(c)$, a proto je menší nebo rovno než největší dolní hranice, tedy

$$f(c) - \varepsilon \leq m \equiv \inf\{f(x) : x \in U_\delta(c)\} \tag{2}$$

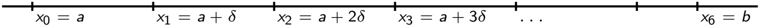
Podobně dostaneme nerovnost mezi horní hranicí $f(c)+\varepsilon$ a nejmenší horní hranicí M

$$f(c)+\varepsilon \geq M \equiv \sup\{f(x) : x \in U_\delta(c)\} \tag{3}$$

Nerovnost (2) vynásobíme -1 a sečteme s nerovnosti (3). Dostaneme

$$2\varepsilon \geq M - m$$

Za důkazem je poznámka o stejnoměrné spojitosti – uvidíme, že z té pro naši funkci plyne, že k danému $\varepsilon > 0$ je možné zvolit $\delta > 0$ stejné pro všechna $c \in [a, b]$.
Zvolme dělení o šířce intervalů rovné δ (kromě, možná, posledního dílku, který může být kratší.



Pak je $M_i - m_i \leq 2\varepsilon$. Zde použijeme úpravu za formulací lemmatu:

$$S(f,D) - s(f,D) = \cdots = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(M_i - m_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)2\varepsilon = 2(b-a)\varepsilon$$

Máme tedy nerovnost

$$S(f, D) - s(f, D) \leq 2(b - a)\varepsilon$$

Máme tedy nerovnost

$$S(f, D) - s(f, D) \leq 2(b-a)\varepsilon$$

K dokončení důkazu zbývá zvolit ε tak, aby platilo $2(b-a)\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$.

Máme tedy nerovnost

$$S(f,D) - s(f,D) \leq 2(b-a)\varepsilon$$

K dokončení důkazu zbývá zvolit ε tak, aby platilo $2(b-a)\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$. Toho dosáhneme například volbou $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}/(3(b-a))$:

Máme tedy nerovnost

$$S(f, D) - s(f, D) \leq 2(b - a)\varepsilon$$

K dokončení důkazu zbývá zvolit ε tak, aby platilo $2(b - a)\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$. Toho dosáhneme například volbou $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}/(3(b - a))$:

$$S(f, D) - s(f, D) \leq 2(b - a)\varepsilon = 2(b - a)\frac{\tilde{\varepsilon}}{3(b-a)} = \frac{2\tilde{\varepsilon}}{3} < \tilde{\varepsilon}$$

$\square$