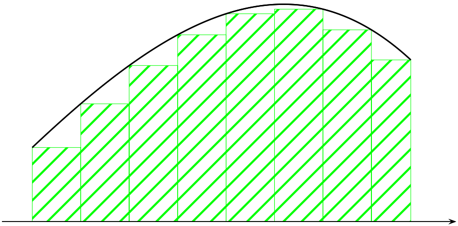
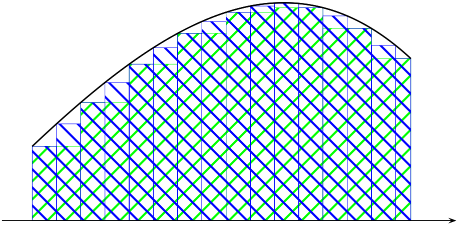
Dolní Riemannův integrál je definován jako supremum dolních součtů

$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



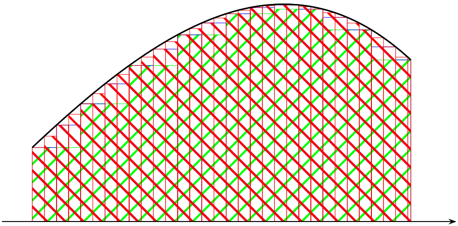
Dolní Riemannův integrál je definován jako supremum dolních součtů

$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



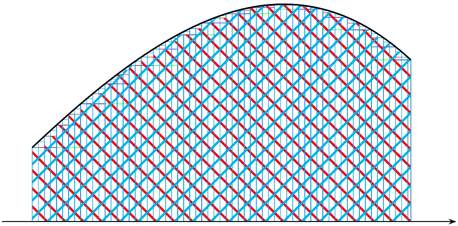
Dolní Riemannův integrál je definován jako supremum dolních součtů

$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



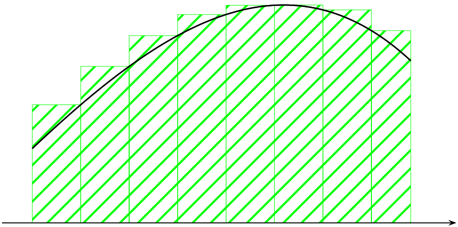
Dolní Riemannův integrál je definován jako supremum dolních součtů

$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



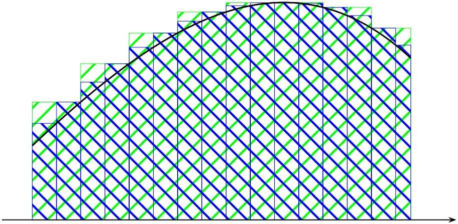
Horní Riemannův integrál jako infimum horních součtů

$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



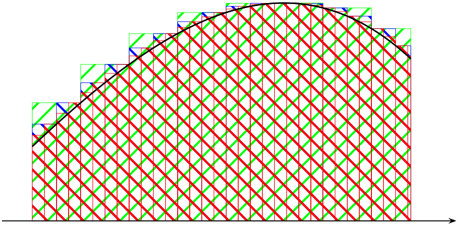
Horní Riemannův integrál jako infimum horních součtů

$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



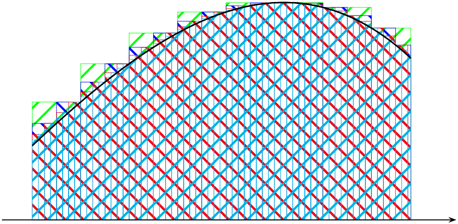
Horní Riemannův integrál jako infimum horních součtů

$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



Horní Riemannův integrál jako infimum horních součtů

$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$



Ukážeme, že $I_d(f,a,b) \le I_h(f,a,b)$ (a zopakujeme si polmy suprema a infima):

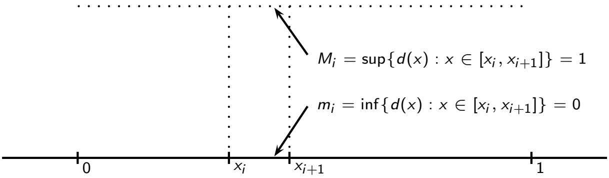
Ukázali jsme, že pro libovolná dvě dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ platí $s(f,D_1) \le S(f,D_2)$. Proto je $s(f,D_1)$ dolní hranicí množiny horních součtů. Protože $I_h(f,a,b)$ je největší dolní hranicí množiny horních součtů, je $s(f,D_1) \le I_h(f,a,b)$.

Protože tato nerovnost platí pro všechny dolní součty, je $I_h(f,a,b)$ horní hranicí množiny dolních součtů, a protože je $I_d(f,a,b)$ nejmenší horní hranicí množiny dolních součtů, je $I_d(f,a,b) \le I_h(f,a,b)$.

Příklad funkce d (Dirichletova funkce), pro kterou je $I_d(d,0,1) < I_h(d,0,1)$:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Každý neprázdný interval obsahuje racionální i iracionální číslo, proto je $m_i = 0$, $M_i = 1$ pro všechna i



a odtud plyne $s(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i = 0$ a $S(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = 1$ pro libovolné dělení D intervalu $[0,1]$.

Definice Riemannova integrálu

Funkci f definovanou a omezenou na intervalu $[a, b]$ nazveme *Riemannovsky integrovatelnou*, pokud se rovnají dolní a horní Riemannův integrál funkce f přes interval $[a, b]$, formálně zapsáno, pokud platí

$$I_d(f, a, b) = I_h(f, a, b).$$

Společnou hodnotu dolního a horního integrálu nazýváme *Riemannovým integrálem funkce f přes interval $[a, b]$*, značíme jej $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, někdy též $(R)\int_a^b f$ a pokud nehrozí záměna, tak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ či též $\int_a^b f$.