Stejnoměrná spojitost funkce.

Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu I*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Stejnoměrná spojitost funkce.

Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu I*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

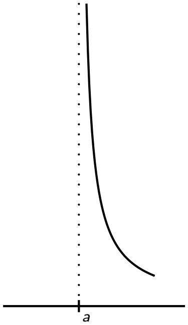
Na obrázku ukážeme, že funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí být na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

Stejnoměrná spojitost funkce.

Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu I*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Na obrázku ukážeme, že funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí být na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.



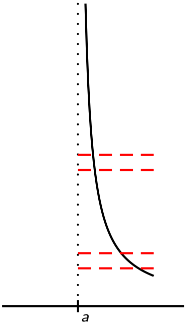
Uvažujme interval (a, b) a funkci s nevlastní limitou v bodě a zprava.

Stejnoměrná spojitost funkce.

Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu I*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Na obrázku ukážeme, že funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí být na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.



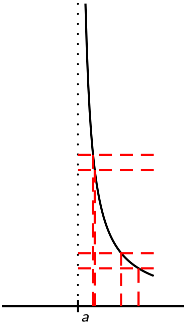
Uvažujme interval (a, b) a funkci s nevlastní limitou v bodě a zprava. Na obrázku jsou na ose y vyznačena dvě okolí o stejné šířce (tedy odpovídající stejnému $\varepsilon > 0$).

Stejnoměrná spojitost funkce.

Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu I*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Na obrázku ukážeme, že funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí být na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.



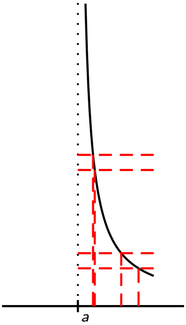
Uvažujme interval (a, b) a funkci s nevlastní limitou v bodě a zprava. Na obrázku jsou na ose y vyznačena dvě okolí o stejné šířce (tedy odpovídající stejnému $\varepsilon > 0$). Funkce je na (a, b) spojitá, to zaručuje existenci okolí vyznačených na ose x.

Stejnoměrná spojitost funkce.

Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu I*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Na obrázku ukážeme, že funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí být na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.



Uvažujme interval (a, b) a funkci s nevlastní limitou v bodě a zprava. Na obrázku jsou na ose y vyznačena dvě okolí o stejné šířce (tedy odpovídající stejnému $\varepsilon > 0$). Funkce je na (a, b) spojitá, to zaručuje existenci okolí vyznačených na ose x. Z obrázku vidíme, že šířka okolí na ose x se s přibližováním k ose y zmenšuje a není tedy pravda, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ společné pro všechna okolí $U_\varepsilon(f(c))$.

Jiné je to s uzavřeným intervalem. Bez důkazu uvedeme znění věty:

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ *je na něm stejnoměrně spojitá.*

Tato věta je potřebná k důkazu Riemannovské integrovatelnosti funkce spojité na uzavřeném intervalu. A Riemannovská integrovatelnost je potřebná k důkazu existence primitivní funkce ke spojité funkci (tentokrát na otevřeném intervalu – ať nemusíme řešit zvlášť krajní body, kde by mělo smysl uvažovat jen jednostranné derivace).

Další věta je přímým důsledkem definic:

Funkce stejnoměrně spojitá na intervalu I *je na něm spojitá.*

Stejnoměrná spojitost zaručuje k $\varepsilon > 0$ stejné $\delta > 0$ pro všechna $c \in I$. Při důkazu spojitosti stačí k $c \in I$, $\varepsilon > 0$ vzít toto δ.