Kapitola 1

Úvod

1.1 Základní pojmy

Primitivní funkcí funkce f na otevřeném intervalu I rozumíme funkci F, pro kterou platí

$$(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$$

Příklady.
Funkce $F(x) = x^3 - 5x$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = 3x^2 - 5$ na množině reálných čísel.
Derivace $(-1/x)'$ je rovna $1/x^2$, a proto je funkce $F(x) = -\frac{1}{x}$ primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, +\infty)$.
Podobně je funkce $F(x) = \log(x)$ primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $F(x) = \log(-x)$ na intervalu $(-\infty, 0)$.
Funkce $F(x) = 2\sqrt{x}$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Jiný název pro primitivní funkci je *neurčitý integrál*. Neurčitý integrál značíme symbolem $\int$ a integrační proměnnou symbolem $\mathrm{d}x$. Výše uvedené příklady zapíšeme pomocí těchto symbolů

$$\begin{aligned}
\int 3x^2 - 5 \,\mathrm{d}x &= x^3 - 5x \\
\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{x} \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \log(x) \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \log(-x) \\
\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x &= 2\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Všimněte si, že se z tohoto zápisu vytratily intervaly. Není to správné, ale budeme se toho zpravidla při výpočtu neurčitého integrálu dopouštět. Jiné to bude při práci s určitým integrálem, tam bude interval dán mezemi integrálu.

1.2 Jednoznačnost

Primitivní funkce není dána jednoznačně. Například $(x^2)' = (x^2+1)' = 2x$, a tedy obě funkce $F_1(x) = x^2$ i $F_2(x) = x^2 + 1$ jsou primitivními funkcemi stejné funkce $f(x) = 2x$. Pro libovolné číslo c je i funkce $F(x) = F_1(x) + c$ primitivní funkcí funkce f, primitivních funkcí má tedy funkce f nekonečně mnoho. Číslo c někdy nazýváme integrační konstantou a někdy aditivní konstantou. Říkáme pak, že je primitivní funkce dána jednoznačně až na aditivní konstantu. Jiná nejednoznačnost v pojmu primitivními funkce není, jak tvrdí následující věta.

Věta. Nechť jsou funkce F_1, F_2 primitivními funkcemi funkce f na intervalu I. Pak existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro $x \in I$ platí $F_1(x) = F_2(x) + c$.

Důkaz. Nechť jsou F_1, F_2 primitivními funkcemi funkce f na intervalu I. Pak z definice primitivní funkce plyne, že pro $x \in I$ platí $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$. Odtud plyne $F_1'(x) = F_2'(x)$.

Uvažujme funkci, která je rozdílem těchto dvou primitivních funkcí $x \mapsto F_1(x) - F_2(x)$. Z výše uvedeného plyne, že její derivace je rovna nule na intervalu I. Odtud plyne, že je tato funkce na intervalu I zároveň neklesající i nerostoucí (plyne z věty o monotonii a derivaci), a tedy je konstantní. A odtud plyne dokazované tvrzení $F_1 = F_2 + c$ na I. $\square$

Následující případ ukazuje, že je ve větě podstatné uvažovat primitivní funkce na intervalu. Obě funkce mají na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ derivaci rovnu $1/x$ a přesto se neliší jen o konstantu.

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ \log(-x) & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ 2 + \log(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Vzorce typu $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log|x| + c$ někteří puritánštější matematici nemají příliš v lásce právě kvůli nejasnosti definičního oboru a nejasnosti významu konstanty c. V tomto textu integrační konstantu c zpravidla nebudeme uvádět.

1.3 Existence

Ke spojitým funkcím existuje primitivní funkce, ale ne vždy ji můžeme vyjádřit pomocí elementárních funkcí. K takovým, pomocí elementárních funkcí nevyjádřitelným integrálům, patří například $\int \exp(-x^2) \,\mathrm{d}x$.

Příkladem funkce, která nemá primitivní funkci je například funkce signum a obecně jakákoliv funkce s nespojitostí typu skok. Pokud by totiž pro nějakou funkci F platilo na okolí nuly $F'(x) = \operatorname{sgn}(x)$, pak by pro $x > 0$ bylo $F'(x) = 1$ a tedy i $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$ a z věty 7.2.1 z [JV] by plynulo $F'(0) = 1$, což je ve sporu s $F'(0) = \operatorname{sgn}(0) = 0$.

Větu o existenci primitivní funkce ke spojité funkci dokážeme později za pomoci Riemannova integrálu.

1.4 Základní vzorce

Následující vzorce jsou přímým důsledkem vzorců pro derivace. Ověřte jejich platnost zderivováním.

Pro $n \neq -1$: $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log|x|$ (jedním zápisem jsme pokryli intervaly kladných i záporných čísel)

$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x)$

$\int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x)$

$\int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(x)$

Pro $a > 0$: $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})$
$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x)$

1.5 Linearita integrálu

Pro funkce f, g a čísla a, b platí $(af+bg)' = af' + bg'$. Odtud plyne obdobný vztah pro integrál

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

například

$$\int (x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int x^2 + 2x + 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$$

Připomeňme souvislost vztahu (1.1) s lineární algebrou. Na levé straně je integrál z lineární kombinace dvou funkcí a na pravé straně je lineární kombinace integrálů. Integrování je tedy operace, která zobrazuje lineární kombinaci na lineární kombinaci obrazů. Takové zobrazení nazýváme lineárním zobrazením. V tomto smyslu je tedy integrování lineární.

1.6 Úlohy na procvičení

1. Ověřte zderivováním platnost vzorců v kapitole základní vzorce.

Pro následující funkce a intervaly nalezněte primitivní funkce a udělejte zkoušku.

2. $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$, $I = (0, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+2x^2}{x^3}$, $I = (0, +\infty)$
4. $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$, $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = 2 - 3\exp(x)$, $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = (1+\sqrt{x})^3$, $I = (0, +\infty)$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$, $I = \mathbb{R}$

Odpovězte na otázky a své odpovědi zdůvodněte:

8. Kolik mají funkce z úloh nahoře primitivních funkcí?
9. Má funkce $f(x) = \exp(-x^2)$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
10. Má funkce $f(x) = \begin{cases} 2+x & x<1 \\ 5-x & x \geq 1 \end{cases}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
11. Má funkce $f(x) = \begin{cases} 2+x & x<1 \\ 4-x & x \geq 1 \end{cases}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
12. Jaký význam má konstanta c ve vzorci $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + c$?
13. Co znamená výrok: "Integrování je lineární operace."?

Kapitola 2

Lineární substituce

V jedné z dalších kapitol vysvětlíme metodu substituce při výpočtu integrálů. V této kapitole vysvětlíme její nejjednodušší variantu – případ lineární substituce. Chceme například spočítat integrál

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Víme, že $\int \sin(y)\,\mathrm{d}y = -\cos(y)$ a tak si tipneme, že integrál (2.1) je roven $-\cos(2x+1)$. Zderivováním zjistíme $(-\cos(2x+1))' = 2\sin(2x+1)$. Odtud nahlédneme, že náš tip stačí jen trochu opravit a dostaneme

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)$$

U složitějších případů budeme substituci provádět následovně:

1. Zvolíme substituci, v našem příkladě $y = 2x+1$.
2. Vypočteme vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$. V našem příkladě $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$. Odtud vyjádříme $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$. Obecně pro substituci $y = ax+b$ je $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y$.
3. Provedeme substituci v integrálu, v našem příkladě převedeme integrál $\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x$ na integrál $\int \frac{1}{2}\sin(y)\,\mathrm{d}y$.
4. Spočítáme integrál po substituci

$$\int \tfrac{1}{2}\sin(y)\,\mathrm{d}y = -\tfrac{1}{2}\cos(y)$$

5. Do výsledku vrátíme původní proměnnou.

$$-\tfrac{1}{2}\cos(y) = -\tfrac{1}{2}\cos(2x+1)$$

6. Dostali jsme výsledek

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\cos(2x+1)$$

7. Uděláme zkoušku zderivováním výsledku

$$(-\tfrac{1}{2}\cos(2x+1))' = \sin(2x+1)$$

Ukážeme náš postup na dalším příkladě. Chceme spočítat integrál

$$\int \sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x$$

Zvolíme substituci $y = 3x - 4$, zderivujeme $\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x$, vyjádříme $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y$ a provedeme substituci. Dostaneme integrál s proměnnou y a spočítáme ho

$$\int \frac{1}{3}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{3}y^{1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\frac{1}{1+1/2}y^{1+1/2} = \frac{2}{9}y^{3/2} = \frac{2}{9}\sqrt{y^3}$$

Na závěr provedeme zpětnou substituci a tím dostaneme výsledek

$$\int \sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3}$$

který zkontrolujeme zderivováním

$$\left(\tfrac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3}\right)' = \left(\tfrac{2}{9}(3x-4)^{\frac{3}{2}}\right)' = \tfrac{2}{9}\tfrac{3}{2}3(3x-4)^{\frac{1}{2}} = (3x-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3x-4}$$

Za zmínku stojí, že výrazy $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ někdy nazýváme diferenciály (nebudeme se zmiňovat, odkud se tento název vzal, je to složitější záležitost a dostaneme se k tomu při probírání funkcí více proměnných) a že jejich význam známe z diferenciálního počtu – jsou to „nekonečně malé“ přírůstky funkcí. Víme, že derivace je podíl takových přírůstků, tedy $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a odtud dostáváme vztah $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$.

2.1 Úlohy na procvičení

Vypočtěte integrály a udělejte zkoušku

1. $\int \cos(2+x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$
4. $\int \exp(-x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int \exp(2x)\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{\exp(x)+1}{\exp(2x)}\,\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{2}{3x-1}\,\mathrm{d}x$
8. $\int \frac{1}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x$
9. $\int (2x+1)^5\,\mathrm{d}x$
10. $\int \sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$
12. $\int \frac{1}{1+(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$
13. $\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$
14. $\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$
15. $\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x$