

Úlohy z cyklometrických funkcí

1. Řešte následující rovnice na intervalu $(-\pi, 5\pi/2]$. Nepoužívejte kalkulačku. Výsledky napište pomocí hodnot cyklometrických funkcí.

(a) $\sin x = 0.9$

(b) $\cos x = -0.1$

(c) $\operatorname{tg} x = -5$

(d) $\operatorname{cotg} x = 2$

*(e) $\cos(2x) = 0.6$

*(f) $\cos(5 - x) = 0.3$

*(g) $\cos(5 - 2x) = 0.3$

2. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit následující funkce na \mathbb{R} a případně jakou hodnotou

$$x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x)$$

$$x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x)$$

$$x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x^2)$$

$$x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x^2)$$

$$x \mapsto (\operatorname{arctg}(1/x))^2$$

$$x \mapsto (\operatorname{arccotg}(1/x))^2$$

3. Vypočtěte jednostranné i oboustrannou limitu funkce f v bodě jedna

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{x^2 - 1}$$

4. Určete definiční obor f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 1}$$

5. Vypočtěte limity

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \cos(\operatorname{arctg}(\frac{1}{x-1}))$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \arcsin(1/(1 + \operatorname{tg}(x)))$$

*6 Vypočtěte limity

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(\sin^2 x)$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \cos \operatorname{sgn} x$$

$$** \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x^2 \sin^2 \frac{1}{x})$$

7. Odvoďte vztahy pro derivace funkcí \arcsin , \arccos , arctg , $\operatorname{arccotg}$.

8a Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$$

8b

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg}(1/x^2)$$

8c

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x}$$

8d

$$f(x) = \arcsin \sqrt{x-x^2}$$

*8e

$$f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arccos(x)$$

*8f

$$f : x \mapsto \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

*8g

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1} - 2 \operatorname{arctg} x$$

9 Načrtněte grafy funkcí a vysvětlete, jak jste k nim došli. Nevíte-li si rady, nechte grafy vykreslit (třeba za použití WolframAlpha nebo desmosu) a přemýšlejte nad nimi.

$$\begin{array}{lll} x \mapsto \sin(\arcsin x) & *x \mapsto \arcsin(\sin x) & x \mapsto \cos(\arcsin x) \\ *x \mapsto \arcsin(\cos x) & x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) & x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \\ *x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) & *x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x) & \end{array}$$

10. Napište Taylorův polynom stupně pět v bodě nula funkcí arkussinus a arkuskosinus.

11. Napište Taylorův polynom stupně pět v bodě nula funkcí arkustangens a arkuskotangens.

12a Vypočtěte za použití lineární aproximace funkcí vhodným Taylorovým polynomem přibližné hodnoty čísel a poté přibližné hodnoty porovnejte s přesnými hodnotami.

$$\operatorname{tg}(0.2), \quad \arcsin(0.1)$$

12b

$$\arcsin(1 - \sqrt{0.9})$$

13. Ukažte, že následující funkce mají limity v nule rovny jedné a vysvětlete, jak se tyto limity projeví na grafech goniometrických a cyklometrických funkcí.

*Napište další funkce, pro které se dají limity v nule odvodit z hodnoty limity $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x$.

$$\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} \quad \frac{x}{\sin(x)} \quad \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$$

- (*14) Víte, jak se dá bez použití úhlooměru zkonstruovat pravidelný pětiúhelník? A víte, na čem je tato konstrukce založená? Vaším úkolem je konstrukci popsat a zdůvodnit.

Prozradíme, že konstrukce je založená na znalosti goniometrických funkcí vnitřního úhlu tohoto pětiúhelníku a k jejich výpočtu pomůže vztah vyjadřující $\sin(5x)$ pomocí $\sin(x)$.