

Úlohy z exponenciálních a logaritmických funkcí

*1 Mocniny reálného čísla a s exponentem $n \in \mathbb{N}$ jsou definovány:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \quad \text{pro } n = 1 \\ a^n &= a^{n-1}a \quad \text{pro } n \geq 2 \end{aligned}$$

Dokažte matematickou indukcí, že pro $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a^{n+m} = a^n a^m$$

*2 Do jednoho obrázku načrtněte grafy *mocninných* funkcí $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x\sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$. Vysvětlete, kde a jak se na těchto grafech projeví monotonie *exponenciální* funkce.

Návod: kde se na těchto grafech objeví pro $a \in \mathbb{R}$ hodnoty a^2 , a^3 , $a^{1/2}$...?

3. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit funkce na \mathbb{R}

$$x \mapsto \exp(-1/x) \quad x \mapsto \exp(-1/x^6)$$

4a Zjistěte, zda nabývá funkce f na intervalu I svého maxima a minima a případně určete jejich hodnoty.

$$f(x) = (x^2 - x - 1) \exp(-3x), \quad I = (0, 5)$$

4b Stejná f , $I = (0, +\infty)$.

4b Stejná f , $I = (-2, +\infty)$.

4c Stejná f , $I = \mathbb{R}$.

5a Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$f(x) = x^2 \exp(-x)$$

5b

$$f(x) = \exp(-x^2 + x)$$

5c

$$f(x) = \sqrt{x} \log x$$

5d

$$f(x) = x \log \sqrt{x}$$

6a Určete definiční obor a nalezněte intervaly, na nichž je funkce monotonní. Zamyslete se, zda jsou vámi nalezené intervaly maximální, speciálně si rozmyslete, zda lze do intervalu zahrnout krajní body.

$$f(x) = (1 + x) \exp(-x^2)$$

*6b

$$f(x) = |1 + x| \exp(-x^2)$$

6c

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

*6c Dokážete úlohu vyřešit bez použití derivace?

7. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x-2-x^2}}{\log(2-x)}$$

8. Vypočtěte limity funkce f v nule a $\pm\infty$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

9a Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v jeho bodě $[1, f(1)]$ a tečnu načrtněte

$$f(x) = \exp(x - \sqrt{x})$$

9b V bodě $[-1, f(-1)]$

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$$

*10 Načrtněte grafy funkcí *hyperbolický sinus* a *hyperbolický kosinus*

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

11. Nechte si softwarem vykreslit grafy funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus. Nad grafy přemýšlejte o vlastnostech těchto funkcí (monotonie, sudost, lichost, limity v nekonečnách). Jak byste tyto vlastnosti zjistili bez pohledu na graf?

Následující úlohy nejsou určeny pro cvičení.

- (*12) Zamyslete se nad tím, proč je $2^0 = 1$. Pro které základy platí $a^0 = 1$?
Proč je $2^{1/2} = \sqrt{2}$, proč je $2^{-1} = 1/2$?
A obecně: proč je $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ a $a^{-p} = 1/a^p$?
Kde je chyba v: $-1 = (-1)^3 = (-1)^{6/2} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$?

Vycházíme ze situace, kdy jste se naučili pracovat s mocninami s kladným přirozeným exponentem a chcete je nějakým rozumným způsobem zobecnit na případ s reálným exponentem. Výše uvažujeme racionální exponent. Další otázka by mohla být: jaký význam dáme mocnině s exponentem $\sqrt{2}$? Například $2^{\sqrt{2}}$.

- (*13) Ukažte, že lze funkci f spojitě rozšířit do nuly a ukažte, že toto rozšíření má v nule všechny derivace nulové. Co to znamená pro Taylorovy polynomy této funkce v nule?

$$f(x) = \exp(-1/x^2)$$

- (*14) Vyjádřete pomocí logaritmu funkce

(a) *hyperbolický arkus sinus* $\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1}$

(b) *hyperbolický arkus kosinus* $\operatorname{arccosh} = (\cosh|_{[0,+\infty)})^{-1}$