Úlohy z goniometrických funkcí

1. Ze součtových vzorců pro sinus a kosinus odvoďte vzorce pro sinus a kosinus dvojnásobného a polovičního argumentu.

2. Odvoďte vztahy pro derivace funkcí cos, tg, cotg. Derivaci kosinu odvoďte z definice, na tangens a kotangens použijte pravidlo o derivaci podílu.
   Pro derivace funkcí tangens a kotangens odvoďte oba tvary

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x) \\ \mathrm{cotg}'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \mathrm{cotg}^2(x) \end{aligned}$$

3. Napište Taylorův polynom stupně dvanáct v bodě nula funkce kosinus a Taylorův polynom stupně tři v bodě nula funkce tangens.

4a Nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí. Hledejte intervaly maximální vzhledem k inkluzi, speciálně si rozmyslete, zda lze do intervalu zahrnout krajní body.

$$f(x) = \sin(x) + \cos^2(x)$$

4b

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

4c

$$f(x) = \sin^3(x) + \cos^3(x)$$

*4d

$$f(x) = \sin^3(x) + |\cos^3(x)|$$

5a Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{3x^2 + 2x^3}$$

5b

$$f(x) = \frac{(1 - \sqrt{4 - x})\sin(x)}{x^2 - 3x}$$

5c
$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x}\,\sin(x)}{2-\sqrt{4+3x}}$$

6. Určete definiční obory a načrtněte grafy funkcí
$$f(x)=\cos\frac{x^2-3x-4}{x+1}\qquad g(x)=\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$$

7. Vypočtěte hodnoty goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens v bodě x, aniž byste vyčíslili x. Výsledky nevyčíslujte, nechte je v přesném tvaru s odmocninami a upravte je.

   (a) $\sin x=\frac{1}{3},\quad x\in\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$

   (b) $\cos x=\frac{1}{4},\quad x\in\langle\pi,2\pi\rangle$

   (c) $\operatorname{cotg} x=2,\quad x\in\langle 0,\pi\rangle$

   *(d) $\cos 2x=\frac{1}{4},\quad x\in\langle-\frac{\pi}{2},0\rangle$

   *(e) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{3},\quad x\in\langle-\pi,\pi\rangle$

   *(f) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-4,\quad x\in\langle-\pi,\pi\rangle$

*8 Odvoďte vzorce
$$\begin{aligned}\cos^2(x)&=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)}\\ \sin^2(x)&=\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}\\ \sin(x)\cos(x)&=\frac{\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}\end{aligned}$$

*9 Odvoďte vzorce vyjadřující $\sin(x)$, $\cos(x)$ pomocí $\operatorname{tg}(x/2)$.

*10 Odvoďte vzorce
$$\begin{aligned}\sin(x)-\sin(y)&=2\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\\ \cos(x)-\cos(y)&=-2\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$

11. Odvoďte vzorce
$$\begin{aligned}\sin(x)\sin(y)&=\tfrac{1}{2}\left(\cos(x+y)-\cos(x-y)\right)\\ \cos(x)\cos(y)&=\tfrac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)\\ \sin(x)\cos(y)&=\tfrac{1}{2}\left(\sin(x+y)-\sin(x-y)\right)\end{aligned}$$

*12 Výraz zadaný následujícím vztahem se nazývá trigonometrický polynom

$$a_0+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)+\cdots+a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

Pomocí sumačního vzorce ho zapíšeme

$$a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

Čísla a_k, b_k, podobně jakou polynomu, nazýváme koeficienty a výrazy $a_k\cos(kx)$, $b_k\sin(kx)$ členy.
Ukažte, že součin dvou trigonometrických polynomů je opět trigonometrický polynom.

Návod: Použijte výledek předchozí úlohy.

*13 Při odvození vzorců pro derivace funkcí sinus a kosinus jsme použili limitu $\cos(x)\to 1$ pro $x\to 0$ a tu jsme zdůvodnili spojitostí funkce kosinus v nule. Spojitost funkcí sinus a kosinus bychom rádi zdůvodnili existencí konečné derivace. To nemůžeme, dokazovali bychom kruhem. Odvoďte derivace sinu a kosinu bez použití spojitosti, napovíme, že k tomu lze využít některou z předchozích úloh.

*14 Ukažte, že ze součtových vzorců plyne, že funkce s, c jsou buď identicky rovny nule, nebo platí $s(0)=0$, $c(0)=1$

$$\begin{aligned} s(x+y) &= s(x)c(y)+c(x)s(y) \\ c(x+y) &= c(x)c(y)-s(x)s(y) \end{aligned}$$

Návod: dosazením $y=0$ dostanete soustavu lineárních rovnic pro $s(x)$, $c(x)$. Co platí pro její determinant?