Úlohy z (číselných) řad I

1. Odvoďte vzorec pro součet konečné a nekonečné geometrické řady.

2. Zvolte číslo s periodickým desetinným rozvojem a převeďte ho na podíl dvou celých čísel dvěma způsoby: jednak úpravami a dále sečtením nekonečné geometrické řady.

3. Zvolte dvě celá čísla a vypočtěte jejich podíl v desetinném tvaru. Pokud vám vyšel periodický desetinný rozvoj, tak se zamyslete, jestli to tak bude vždy. Přitom ukončený desetinný rozvoj považujeme také za periodický s periodou $\overline{0}$.

4. Určete, které z následujících řad mají součet a součty vypočtěte. Která z řad je konvergentní?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{3^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

5. Uvažujme posloupnost kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ takovou, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}/a_n < q$. Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí $a_n < a_1 q^{n-1}$.

6a Zformulujte nutnou podmínku konvergence a napište, co z ní plyne pro následující řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2+1}{\sqrt{k^3}+1} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^3}+1}{k^2+1}$$

6b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{2^{2k}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

7a Vysvětlete následující úpravy a uveďte, které z nich jsou korektní a které nikoliv.
Uvažujme geometrickou řadu

$$s_a = 1 + \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \cdots$$

a vynásobme ji číslem $\frac{8}{7}$

$$\frac{8s_a}{7} = \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \frac{8^5}{7^5} \cdots .$$

Vidíme, že platí $s_a = 1 + \frac{8s_a}{7}$, odkud dostaneme $s_a = -7$.

*7b Uvažujme řadu

$$s_b = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{1}$$

a vydělme ji člen po členu dvěma

$$\frac{s_b}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \cdots . \tag{2}$$

Vidíme, že stejnou řadu dostaneme z původní vynecháním členů na lichých pozicích. Odtud plyne (odečteme (2) od (1))

$$\frac{s_b}{2} = s_b - \frac{s_b}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots . \tag{3}$$

A odtud dostaneme odečtením řady (2) od řady (3)

$$0 = \frac{s_b}{2} - \frac{s_b}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots ,$$

a tedy součet kladných čísel je roven nule.

*7c Uvažujme řadu

$$s_c = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Její členy vydělíme dvěma a proložíme je nulami

$$\frac{s_c}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots .$$

Obě řady člen po členu sečteme

$$\frac{3s_c}{2} = s_c + \frac{s_c}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Dostali jsme stejnou řadu jako na začátku, jen se zpřeházenými členy a přidanými nulami. Proto platí $s_c = \frac{3s_c}{2}$.