Úlohy z (číselných) řad II

1. Srovnejte podle velikosti hodnoty výrazů pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

$$\frac{1}{k} \qquad \frac{1}{k^2} \qquad \frac{1}{k^5} \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{k^7}} \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{k^5}}$$

a napište co odtud plyne pro konvergenci řad

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^7}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k^5}}$$

2a Zdůvodněte, že má řada součet a zjistěte, zda je konvergentní.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k+k^5}{3+k^6}$$

*2b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-10k^4+k^5}{3+k^6}$$

2c

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k+\sqrt{k}}{k^4+\sqrt{k^5}}$$

*2d

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^5-2k^3-k-20}{\sqrt{k^{15}}}$$

3a Zjistěte, které z následujících řad absolutně konvergují

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(k^3+4\sqrt{k})}{2^k} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2+\sqrt{2k+1}}{k^3+\sqrt{k^9}}$$

3b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{3^k(\sqrt{k}+1)} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+3}{k^2+\sqrt{k^3+2}}$$

*4 Ověřte předpoklady Leibnizova kritéria pro následující řady. Co odtud plyne pro konvergenci a absolutní konvergenci řad?

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2\sqrt{k}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}(1+\tfrac{1}{k})$$

*5 Vypočtěte součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$.

Návod: členy řady přepíšeme do schématu

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & q & + & 2q^2 & + & 3q^3 & + & 4q^4 & + & 5q^5 & + & \cdots \\
= & q & + & q^2 & + & q^3 & + & q^4 & + & q^5 & + & \cdots \\
 & & + & q^2 & + & q^3 & + & q^4 & + & q^5 & + & \cdots \\
 & & & & + & q^3 & + & q^4 & + & q^5 & + & \cdots \\
 & & & & & & + & q^4 & + & q^5 & + & \cdots \\
 & & & & & & & & + & q^5 & + & \cdots \\
 & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Protože je řada absolutně konvergentní, nezáleží výsledek na pořadí sčítání. Můžeme tedy sčítat nejdříve po řádcích.