

Písemná část zkoušky z AN2

9. června 2023

1. Určete definiční obor funkce f a nalezněte intervaly, na nichž je f rostoucí.

$$f(x) = -\log(12x - x^3)$$

- 1* K úloze 1 navíc z rovnice $n = 2^p$ vyjádřete p pomocí n .

2. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f(x) = \sqrt{\cos^2(x) + 2\sin^4(x)}$$

- 2* Určete, pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice $y = f(x)$ s neznámou x na intervalu $[0, \pi)$ právě dvě různá řešení.

3. Vypočtete Newtonův integrál funkce f na intervalu $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \frac{2}{3 + \sin(x) + 2\cos(x)}$$

- 3* Zdůvodněte, že má funkce f primitivní funkci na intervalu $(0, 10)$ a určete ji.

4. Načrtněte obrazec O a vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací O okolo osy x .

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 2 \geq \sqrt{x} + y\}$$

- 4* Kromě objemu v příkladu 4 vypočtete objem tělesa vzniklého rotací kolem osy y . Oba objemy navíc odhadněte a se svým odhadem porovnejte.

5. Zjistěte, zda následující řady absolutně konvergují

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5 - k - 4k^2 - \sqrt{5k + 1}}{2^{2k+1}(k^2 + 4)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 2 - \sqrt{k}}{k^4 + k + 3}$$

5*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{k^2 - 2 - \sqrt{k}}{k^4 + k + 3} + 1 \right)$$

- 6*(žolík) Otevřená nádoba má tvar komolého kužele, poloměr spodní podstavy je R_1 , poloměr horní podstavy je $R_2 = 2R_1$, výška je H . Nádoba je naplněná vodou po okraj. Vypočtete za jak dlouho vyteče z nádoby voda otvorem tvaru kruhu o poloměru $R = R_1/10$ umístěném ve dně nádoby.

Rychlost výtoku je při výšce vody h v nádobě rovna $\sqrt{2gh}$.