Písemná část zkoušky z AN2

23. června 2023

1. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.
$$f(x) = \arccos(2x - 2x^2)$$

1* Určete, pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice $y = 1/f(x)$ s neznámou x právě jedno řešení.

2. Určete definiční obor funkce f a intervaly, na nichž je f rostoucí
$$f(x) = \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}$$

2* Načrtněte graf funkce f a z náčrtku určete, pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice $y = f(x)$ s neznámou x právě dvě různá řašení. Náčrtek musí být jen natolik přesný, aby z něj bylo možné vyčíst požadovanou informaci.

3. Převeďte integrál substitucí na integrál z racionální funkce.
$$\int_0^1 \frac{1}{2x^2 + \sqrt{3 + x^2}} \, \mathrm{d}x$$

3* Pro integrál po substituci napište rozklad na součet parciálních zlomků. Prozradíme, že dva kořeny jmenovatele jsou malá celá čísla.

4. Vypočtěte obsah obrazce ležícího v prvním kvadrantu a omezeného shora grafem funkce f.
$$f(x) = (x - x^2)\exp(x)$$

4* Obrazec načrtněte, obsah odhadněte a porovnejte s vypočteným obsahem.

4* Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce okolo osy x.

5. Pro následující řady ověřte, zda je splněna nutná podmínka konvergence a napište, co odtud plyne pro konvergenci řady.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + \sqrt{3 + k^4 + k^6}}{k^4 - 2k + \sqrt{5k + k^4}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k + \sqrt{2 + k^3}}{k + 2 + \sqrt{1 + k^4}}$$

5*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k^2 + \sqrt{3 + k^4 + k^6}}{k^4 - 2k + \sqrt{5k + k^4}}\right) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k^2 + k + \sqrt{2 + k^3}}{k + 2 + \sqrt{1 + k^4}}\right)$$

6*(žolík) Otevřená nádoba má tvar komolého kužele, poloměr spodní podstavy je R_1, poloměr horní podstavy je $R_2 = 3R_1$, výška je H. Nádoba je naplněná vodou po okraj. Vypočtěte za jak dlouho vyteče z nádoby voda otvorem tvaru kruhu o poloměru $R = R_1/5$ umístěném ve dně nádoby.

Rychlost výtoku je při výšce vody h v nádobě rovna $\sqrt{2gh}$.