Písemná část zkoušky z AN2

29. června 2023

1. Určete definiční obor funkce f a intervaly, na nichž je f rostoucí

$$f(x) = \arccos \frac{x^2 - 2x}{2}$$

1* Úlohu vyřešte bez použití derivace.

2. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f(x) = x \log(\sqrt{x})$$

2* Načrtněte graf funkce f a z náčrtku určete, pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice $y = f(x)$ s neznámou x právě dvě různá řašení. Náčrtek stačí být jen natolik přesný, aby z něj bylo možné vyčíst požadovanou informaci.

3. Převeďte integrál substitucí na integrál z racionální funkce.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

3* Integrál vypočtěte.

3* Integrál je délkou křivky – určete ji a načrtněte v souřadném systému.[1]

4. Vypočtěte obsah obrazce ležícího v prvním kvadrantu a omezeného shora grafem funkce f.

$$f(x) = (4x - x^2)\exp(x)$$

4* Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce okolo osy x.[2]

5. Zjistěte, zda absolutně konvergují řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde

$$a_k = \frac{k^2 + \sqrt{3 + k^4 + k^6}}{k^4 - 2k + \sqrt{5k + k^4}} \qquad b_k = \frac{k^2 + k + \sqrt{2 + k^3}}{k^2 + 2 + \sqrt{1 + k}}$$

5* Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \sin a_k$.

6*(žolík) Otevřená nádoba má tvar komolého kužele, poloměr spodní podstavy je R_1, poloměr horní podstavy je $R_2 = 3R_1$, výška je H. Nádoba je naplněná vodou po okraj. Vypočtěte za jak dlouho vyteče z nádoby voda otvorem tvaru kruhu o poloměru $R = R_1/5$ umístěném ve dně nádoby.

Uvažujte, že rychlost výtoku je při výšce vody h v nádobě rovna $\sqrt{2gh}$.

---

[1] Za každý hvězdičkový příklad můžete získat až půl příkladu navíc. Maximum za příklady na substituci jsou tedy dva příklady do hodnocení.

[2] Meze jen dosaďte, neupravujte, nepočítejte.