Písemná část zkoušky z AN2

3. července 2023

1. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f(x) = (x^2 + x - 1)\exp(x)$$

1* Načrtněte graf funkce f a z náčrtku určete, pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice $y = f(x)$ s neznámou x právě dvě různá řašení. Náčrtek stačí být jen natolik přesný, aby z něj bylo možné vyčíst požadovanou informaci.

2. Určete definiční obor funkce f a intervaly, na nichž je f rostoucí

$$f(x) = \arccos \frac{x^2 - 2x}{2}$$

2* Úlohu vyřešte bez použití derivace.

3. Převeďte integrál substitucí na integrál z racionální funkce.

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{x+8}{x}}\,\mathrm{d}x$$

3* Integrál vypočtěte.

3* Integrál je délkou křivky – určete ji a načrtněte v souřadném systému.[1]

4. Vypočtěte obsah obrazce ležícího v prvním kvadrantu a omezeného shora grafem funkce f.

$$f(x) = -x^2 \log(x)$$

4* Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce okolo osy x.

5. Zjistěte, zda absolutně konvergují řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde

$$a_k = \frac{k^2 + \sqrt{3 + k^4 + k^6}}{k^4 - 2k + \sqrt{5k + k^4}} \qquad b_k = \frac{k^2 + k + \sqrt{2 + k^3}}{k^2 + 2 + \sqrt{1 + k}}$$

5* Řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \cos b_k$.

[1] Za každý hvězdičkový příklad můžete získat až půl příkladu navíc. Maximum za příklady na substituci jsou tedy dva příklady do hodnocení.

6*(žolík) Otevřená nádrž má tvar komolého kužele, poloměr spodní podstavy je R_1, poloměr horní podstavy je $R_2 = 2R_1$, výška je H. Nádrž je naplněná vodou po okraj. Vypočtěte za jak dlouho vyteče z nádrže voda otvorem tvaru kruhu o poloměru $R = R_1/50$ umístěném na dně nádrže. Uvažujte, že rychlost výtoku je při výšce vody h v nádrži rovna $\sqrt{2gh}$.

7*(žolík) V hloubce $2H$ pod dnem nádrže je umístěna turbína. Vypočtěte energii, kterou lze vypuštěním celého obsahu nádrže potrubím k turbíně získat při účinnosti 75%. Připomeňme, že potenciální energie ve výšce h je rovna mgh, kde m je hmotnost, g gravitační zrychlení.

8*(žolík) Vypočtěte integrál. Odhadněte, jakých hodnot nabývá integrovaná funkce na intevalu, přes který integrujete a odtud odhadněte hodnotu integrálu a porovnejte s vypočtenou hodnotou. Uvažujte $\log 2 \doteq 0.7$

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$