Zavedení (definice) goniometrických funkcí

text pro studenty učitelství na FP TUL

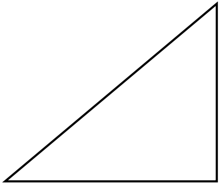
Martina Šimůnková

1. března 2023

TRIGONOMETRICKÁ DEFINICE

V pravoúhlém trojúhelníku zvolíme jednotku délky tak, aby přepona měla délku jedna.
Označíme úhel α, protilehlou odvěsnu a, přilehlou b.

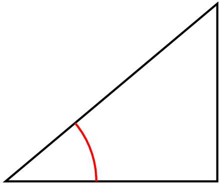
TRIGONOMETRICKÁ DEFINICE



V pravoúhlém trojúhelníku zvolíme jednotku délky tak, aby přepona měla délku jedna.

Označíme úhel α, protilehlou odvěsnu a, přilehlou b.

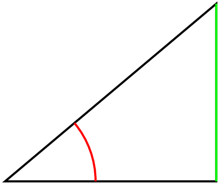
TRIGONOMETRICKÁ DEFINICE



V pravoúhlém trojúhelníku zvolíme jednotku délky tak, aby přepona měla délku jedna.

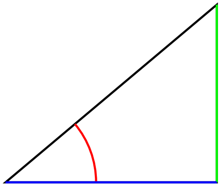
Označíme úhel α, protilehlou odvěsnu a, přilehlou b.

TRIGONOMETRICKÁ DEFINICE



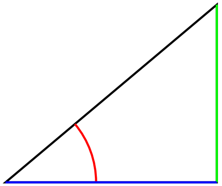
V pravoúhlém trojúhelníku zvolíme jednotku délky tak, aby přepona měla délku jedna.
Označíme úhel α, protilehlou odvěsnu a, přilehlou b.

TRIGONOMETRICKÁ DEFINICE



V pravoúhlém trojúhelníku zvolíme jednotku délky tak, aby přepona měla délku jedna.
Označíme úhel α, protilehlou odvěsnu a, přilehlou b.

TRIGONOMETRICKÁ DEFINICE

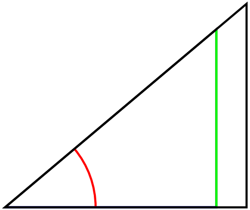


V pravoúhlém trojúhelníku zvolíme jednotku délky tak, aby přepona měla délku jedna.
Označíme úhel α, protilehlou odvěsnu a, přilehlou b.

Goniometrické funkce ostrého úhlu α jsou definovány vztahy

$$\sin(\alpha) = a \quad \cos(\alpha) = b \quad \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

TRIGONOMETRICKÁ DEFINICE



V pravoúhlém trojúhelníku zvolíme jednotku délky tak, aby přepona měla délku jedna.
Označíme úhel α, protilehlou odvěsnu a, přilehlou b.

Goniometrické funkce ostrého úhlu α jsou definovány vztahy

$$\sin(\alpha) = a \quad \cos(\alpha) = b \quad \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Má-li přepona délku c, mají odvěsny délky také c-krát větší (případně c-krát menší). Protilehlá odvěsna má tedy délku $c\sin(\alpha)$, přilehlá délku $c\cos(\alpha)$ (odtud dostaneme vzorce známé ze střední školy).

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.

Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku a, b.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.

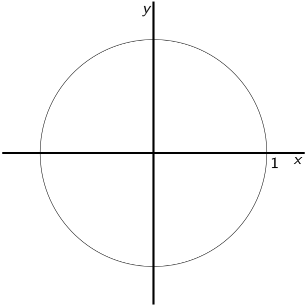
Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku a, b.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.



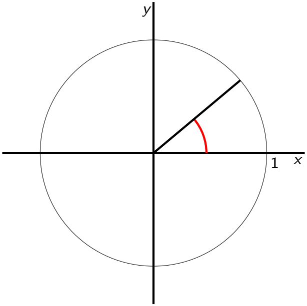
Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku a, b.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.



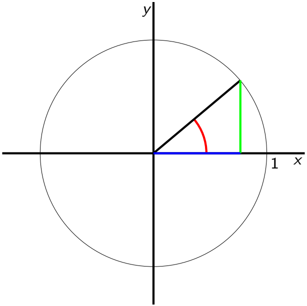
Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku a, b.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.



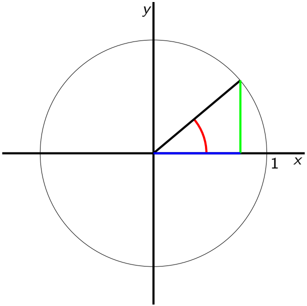
Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku a, b.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.



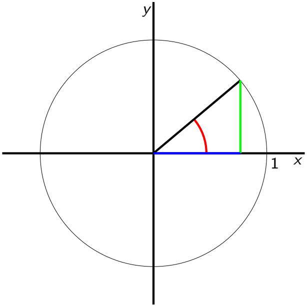
Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku *a*, *b*.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.



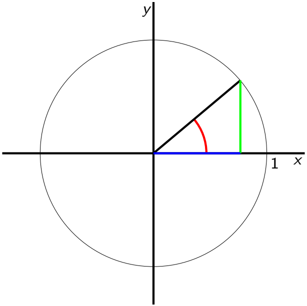
Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku *a*, *b*.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.



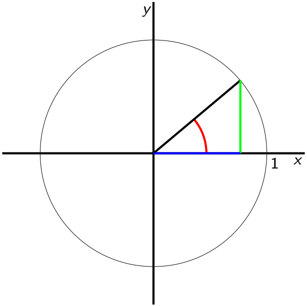
Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku a, b.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.



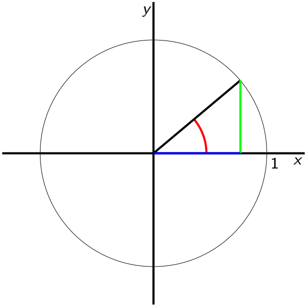
Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku a, b.

Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

Naším cílem je rozšířit definici goniometrických funkcí z intervalu $(0, \pi/2)$ na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.



Vyznačíme úhel α a odvěsny pravoúhlého trojúhelníku *a*, *b*.

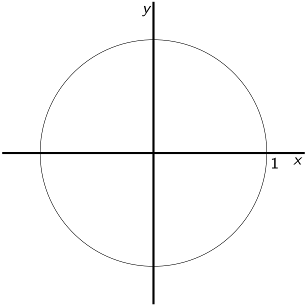
Přepona trojúhelníku má jednotkovou velikost, proto je $\sin(\alpha) = a$, $\cos(\alpha) = b$.

Průsečík ramene úhlu s jednotkovou kružnicí má souřadnice $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

V dalším budeme, ve shodě s obecnou zvyklostí, značit symbolem α nejen úhel, ale i jeho velikost.

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ

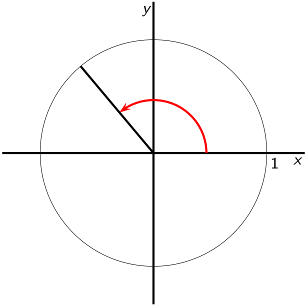
DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ



Zvolíme číslo $\alpha \geq 0$ a k němu úhel v kladném směru (tj.proti směru hodinových ručiček) od kladné poloosy x. Průsečík ramene s kružnicí označíme B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce definujeme

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

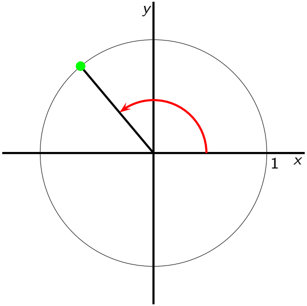
DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ



Zvolíme číslo $\alpha \geq 0$ a k němu úhel v kladném směru (tj.proti směru hodinových ručiček) od kladné poloosy x. Průsečík ramene s kružnicí označíme B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce definujeme

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

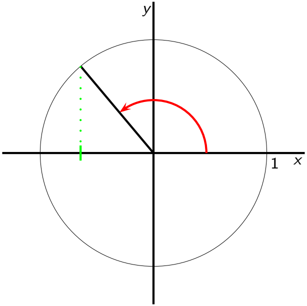
DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ



Zvolíme číslo $\alpha \geq 0$ a k němu úhel v kladném směru (tj.proti směru hodinových ručiček) od kladné poloosy x. Průsečík ramene s kružnicí označíme B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce definujeme

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

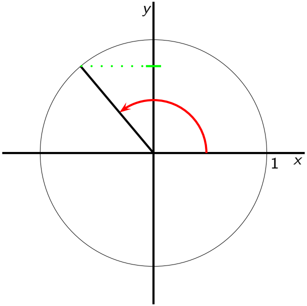
DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ



Zvolíme číslo $\alpha \geq 0$ a k němu úhel v kladném směru (tj.proti směru hodinových ručiček) od kladné poloosy x. Průsečík ramene s kružnicí označíme B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce definujeme

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

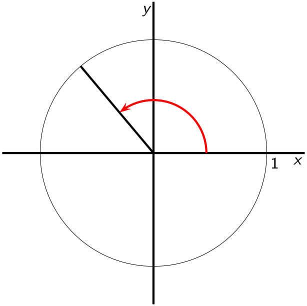
DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ



Zvolíme číslo $\alpha \geq 0$ a k němu úhel v kladném směru (tj.proti směru hodinových ručiček) od kladné poloosy x. Průsečík ramene s kružnicí označíme B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce definujeme

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

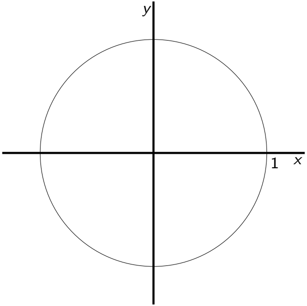
DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ



Zvolíme číslo $\alpha \geq 0$ a k němu úhel v kladném směru (tj.proti směru hodinových ručiček) od kladné poloosy x. Průsečík ramene s kružnicí označíme B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce definujeme

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ

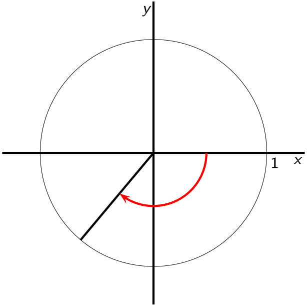


Pro záporné $\alpha < 0$ vyneseme úhel v opačném směru.

Ostatní je stejné: bod B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ

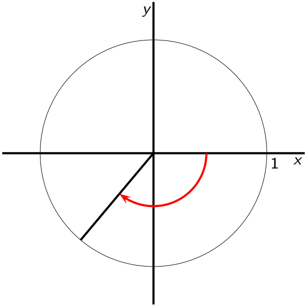


Pro záporné $\alpha < 0$ vyneseme úhel v opačném směru.

Ostatní je stejné: bod B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ

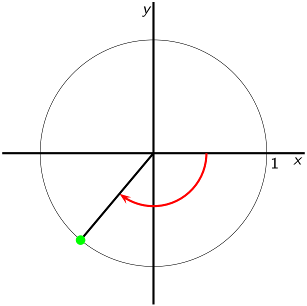


Pro záporné $\alpha < 0$ vyneseme úhel v opačném směru.

Ostatní je stejné: bod B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce

$$\sin(\alpha) = B_y \qquad \cos(\alpha) = B_x$$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ

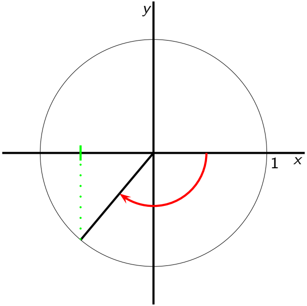


Pro záporné $\alpha < 0$ vyneseme úhel v opačném směru.

Ostatní je stejné: bod B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ

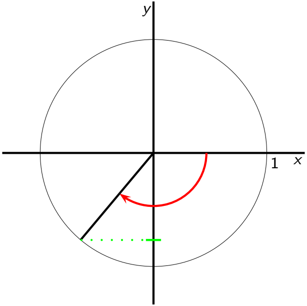


Pro záporné $\alpha < 0$ vyneseme úhel v opačném směru.

Ostatní je stejné: bod B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce

$$\sin(\alpha) = B_y \qquad \cos(\alpha) = B_x$$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ

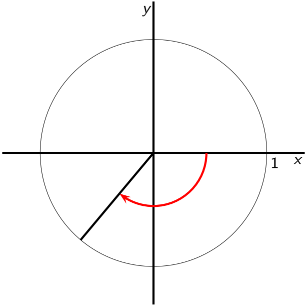


Pro záporné $\alpha < 0$ vyneseme úhel v opačném směru.

Ostatní je stejné: bod B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI – POKRAČOVÁNÍ



Pro záporné $\alpha < 0$ vyneseme úhel v opačném směru.

Ostatní je stejné: bod B, jeho souřadnice $[B_x, B_y]$ a goniometrické funkce

$$\sin(\alpha) = B_y \quad \cos(\alpha) = B_x$$

AXIOMATICKÁ DEFINICE

AXIOMATICKÁ DEFINICE

Z uvedených definic jsme odvodili goniometrické funkce argumentů (argumentem funkce nazýváme její proměnnou): 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$.

AXIOMATICKÁ DEFINICE

Z uvedených definic jsme odvodili goniometrické funkce argumentů (argumentem funkce nazýváme její proměnnou): 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$.

(SP) Součtové vzorce a z nich odvozené vzorce pro poloviční argument umožní spočítat hodnoty pro mnohé další argumenty, ale ne pro všechny.

AXIOMATICKÁ DEFINICE

Z uvedených definic jsme odvodili goniometrické funkce argumentů (argumentem funkce nazýváme její proměnnou): 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$.

(SP) Součtové vzorce a z nich odvozené vzorce pro poloviční argument umožní spočítat hodnoty pro mnohé další argumenty, ale ne pro všechny.
(L) Limita podílu $\sin(x)/x$ určí jednotky (limita je rovna jedné jen pro radiány) a navíc spolu se součtovými vzorci zajistí existenci derivace goniometrických funkcí, a tedy i jejich spojitost.

AXIOMATICKÁ DEFINICE

Z uvedených definic jsme odvodili goniometrické funkce argumentů (argumentem funkce nazýváme její proměnnou): 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$.

(SP) Součtové vzorce a z nich odvozené vzorce pro poloviční argument umožní spočítat hodnoty pro mnohé další argumenty, ale ne pro všechny.
(L) Limita podílu $\sin(x)/x$ určí jednotky (limita je rovna jedné jen pro radiány) a navíc spolu se součtovými vzorci zajistí existenci derivace goniometrických funkcí, a tedy i jejich spojitost.

Pomocí (SP) lze určit hodnoty na husté podmnožině množiny reálných čísel, ze spojitosti pak lze určit i ostatní hodnoty.

AXIOMATICKÁ DEFINICE – POKRAČOVÁNÍ

AXIOMATICKÁ DEFINICE – POKRAČOVÁNÍ

Následující věta, kterou uvedeme bez důkazu, ukazuje, z jakých podmínek lze všechny ostatní vlastnosti funkcí sinus a kosinus odvodit.

Věta. Existuje právě jedna dvojice funkcí s, c, která splňuje

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y))$
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y))$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(s^2(x) + c^2(x) = 1)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{s(x)}{x} = 1$

AXIOMATICKÁ DEFINICE – POKRAČOVÁNÍ

Následující věta, kterou uvedeme bez důkazu, ukazuje, z jakých podmínek lze všechny ostatní vlastnosti funkcí sinus a kosinus odvodit.

Věta. Existuje právě jedna dvojice funkcí s, c, která splňuje

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y))$
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y))$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(s^2(x) + c^2(x) = 1)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{s(x)}{x} = 1$

Uvedená věta nám umožňuje definovat funkce sinus a kosinus pomocí výše uvedených vlastností. Takovou definici nazýváme *axiomatickou definicí* a vlastnosti 1 až 4 nazýváme *axiomy*.

AXIOMATICKÁ DEFINICE – POKRAČOVÁNÍ

Následující věta, kterou uvedeme bez důkazu, ukazuje, z jakých podmínek lze všechny ostatní vlastnosti funkcí sinus a kosinus odvodit.

Věta. Existuje právě jedna dvojice funkcí s, c, která splňuje

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y))$
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y))$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(s^2(x) + c^2(x) = 1)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{s(x)}{x} = 1$

Uvedená věta nám umožňuje definovat funkce sinus a kosinus pomocí výše uvedených vlastností. Takovou definici nazýváme *axiomatickou definicí* a vlastnosti 1 až 4 nazýváme *axiomy*.

Definice. Dvojici funkcí s, c, které splňují axiomy 1 až 4 nazýváme sinem a kosinem a značíme sin, cos.

AXIOMATICKÁ DEFINICE – POKRAČOVÁNÍ

Následující věta, kterou uvedeme bez důkazu, ukazuje, z jakých podmínek lze všechny ostatní vlastnosti funkcí sinus a kosinus odvodit.

Věta. Existuje právě jedna dvojice funkcí s, c, která splňuje

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y))$
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y))$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(s^2(x) + c^2(x) = 1)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{s(x)}{x} = 1$

Uvedená věta nám umožňuje definovat funkce sinus a kosinus pomocí výše uvedených vlastností. Takovou definici nazýváme *axiomatickou definicí* a vlastnosti 1 až 4 nazýváme *axiomy*.

Definice. Dvojici funkcí s, c, které splňují axiomy 1 až 4 nazýváme sinem a kosinem a značíme sin, cos.

Poznámka. Z věty plyne, že všechny vlastnosti funkcí sinus a kosinus plynou z uvedených čtyř axiomů.