

Úlohy na goniometrické funkce (středoškolské)

1. Odvoďte z trigonometrické definice hodnoty goniometrických funkcí pro $x = \pi/6$, $x = \pi/4$, $x = \pi/3$.

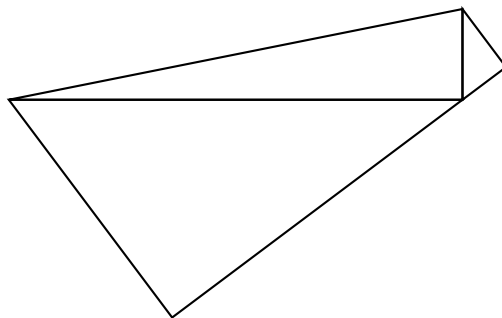
NÁVOD: použijte rovnostranný trojúhelník a rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

2. Odvoďte z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici hodnoty goniometrických funkcí v bodech $\pi/6$, $\pi/2$, $4\pi/3$, $7\pi/4$, $25\pi/6$.
3. Z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici odvoďte vzorce

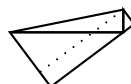
$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin(x) & \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\ * \sin(x + \pi/2) &= \cos(x) & * \cos(x + \pi/2) &= -\sin(x)\end{aligned}$$

Hvězdička značí náročnější úlohu.

- *4 Hledejte další vztahy goniometrických funkcí, které lze odvodit z definice na jednotkové kružnici.
5. Na obrázku vidíte tři pravoúhlé trojúhelníky. Tři úhly na dolní pravé straně se skládají na přímý úhel. Označte velikosti úhlů nalevo α , β a pomocí α , β vyjádřete nejdříve velikosti ostatních úhlů a poté velikosti odvěsen těchto tří trojúhelníků, víte-li, že největší přepona má jednotkovou délku.



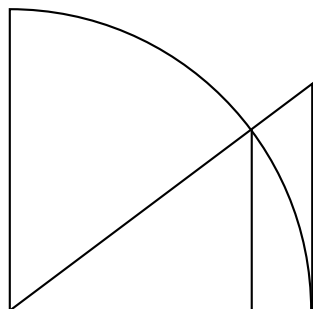
6. Použijte výsledky předchozího příkladu k odvození součtových vzorců pro sinus a kosinus.



NÁVOD: Do obrázku nahoře dokreslete odvěsnu:

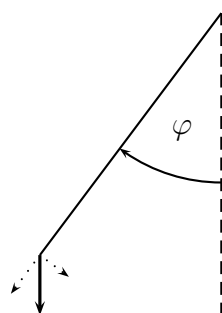
POZNÁMKA: Od studentů mám vylepšení obrázku – doplňte jej na obdélník a případně pak obdélník postavte na jednu z jeho stran.

7. Na obrázku je čtvrtkruh o jednotkovém poloměru a dva podobné pravoúhlé trojúhelníky. Označte velikost společného úhlu těchto trojúhelníků φ a vyjádřete obsahy trojúhelníků jako funkci proměnné φ . Trojúhelníky vytínají na čtvrtkruhu výseč, vyjádřete obsah této výseče jako funkci proměnné φ . Z odvozených obsahů sestavte dvě nerovnosti a z každé nerovnosti vyjádřete odhad pro podíl $(\sin \varphi)/\varphi$.



Návod: Dodá-li vám znalost výsledku více jistoty, hledejte jej na webu s programem přednášky.

8. Na obrázku je znázorněno kyvadlo a gravitační síla o velikosti g . Rozložte tuto sílu na pohybovou sílu (bude tečná ke směru pohybu) a na reakci závěsu kyvadla. Pohybovou sílu vyjádřete pomocí velikosti gravitační síly g a úhlu φ (a hmotnosti závaží kyvadla).



Pohybovou sílu dosaďte do Newtonova pohybového zákona $F = ma$, za zrychlení dosaďte $a = l\varphi''$, kde l je délka závěsu a φ'' je druhá derivace velikosti úhlu φ podle času.

9. Vypočtete, jak daleko dohodíte na vodorovném povrchu při zanedbání odporu vzduchu (jediná působící síla je tedy konstantní gravitační síla), pokud hážete rychlostí v pod úhlem α , měřeno od vodorovné podložky.

Návod: nakreslete si obrázek a rozložte rychlost v na složky v_x ve vodorovném směru a v_y ve svislém směru.

Ve vodorovném směru se hosený předmět bude pohybovat rovnoměrně, ve svislém s gravitačním zrychlením g , poloha bude na čase záviset vztahy $y = v_y t - gt^2/2$, $x = v_x t$.

10. Zjistěte, které číslo je větší, aniž byste je vycíslili

- (a) $A_1 = \cos 20^\circ$, $A_2 = \cos 30^\circ$
- (b) $B_1 = \sin 100^\circ$, $B_2 = \cos 30^\circ$
- (c) $C_1 = 2^{-\sin 100^\circ}$, $C_2 = 2^{-\cos 30^\circ}$
- (d) $D_1 = \cos 1$, $D_2 = \cos 2$

$$(e) E_1 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\cos 1}}, \quad E_2 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\cos 2}}$$

$$(f) F_1 = \frac{1}{1-\sqrt{1+\cos 1}}, \quad F_2 = \frac{1}{1-\sqrt{1+\cos 2}}$$

(*11) Ukažte, že pro libovolnou dvojici funkcí c, s platí: splňují-li na \mathbb{R} vztahy

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \quad (1)$$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y) \quad (2)$$

$$(s(x))^2 + (c(x))^2 = 1 \quad (3)$$

pak splňují na \mathbb{R} i vztahy

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y) \quad (4)$$

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y) \quad (5)$$

NÁVOD: Do vztahů 1, 2 za x dosadíte $x-y$ a z rovnic vyjádříte $s(y-x), c(y-x)$ pomocí $s(x), s(y), c(x), c(y)$. Nalezněte dvojici funkcí c, s splňující součtové vzorce (1), (2), ale nesplňující (4), (5).

NÁVOD: Zvolte za s nulovou funkci a zamyslete se, jak zvolit funkci c .