Úlohy na cvičení 27. února 2024 z AN2

1. Odvoďte vztahy pro derivaci funkce

   a,b. kosinus přímo z definice

   c. tangens, použijte vzorec pro derivaci podílu; odvoďte oba vzorce

   $$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$$

   d. kotangens, použijte vzorec pro derivaci podílu; odvoďte oba vzorce

   $$\mathrm{cotg}'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \mathrm{cotg}^2(x)$$

2. Napište Taylorův polynom

   a,b. funkce kosinus v nule stupně patnáct

   c,d. funkce tangens v nule stupně pět

3. Zjistěte monotonii funkce a použijte ji k výpočtu oboru hodnot funkce

   a.
   $$f(x) = \sin^3(x) - \cos^3(x)$$

   b.
   $$f(x) = \sin(x)\cos^3(x)$$

   c.
   $$f(x) = 3\sin^2(x) + 4\cos^3(x)$$

   d.
   $$f(x) = \sin(x) - \cos^2(x)$$

4. Vypočtěte hodnoty goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens, znáte-li jednu z nich a pro jednoznačnost máte zadaný interval. K výpočtu použijte vzorce a výsledek vyjádřete ve tvaru s odmocninami. Nepočítejte hodnoty x, y.

   a,b. $\sin(x) = 0.2$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$
   $\mathrm{cotg}(y) = 4$, $y \in [0, \pi]$

   c,d. $\cos(x) = 0.4$, $x \in [\pi, 2\pi]$
   $\mathrm{tg}(y) = -2$, $y \in [\pi/2, 3\pi/2]$

5. Ze součtových vzorců pro sinus a kosinus odvoďte vzorce pro dvojnásobný a poloviční argument.

(*6) Odvoďte vzorce (k odvození používejte výhradně součtové vzorce, případně z nich odvozené vzorce v úloze 5)

a.

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(x)}$$
$$\sin^2(x) = \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{1+\mathrm{tg}^2(x)}$$
$$\sin(x)\cos(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{1+\mathrm{tg}^2(x)}$$

b.

$$\cos(x) = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)}$$
$$\sin(x) = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)}$$

c.

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)$$

d.

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) - \cos(x-y)\right)$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) - \sin(x-y)\right)$$

(*7) Ukažte, že ze součtových vzorců

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$
$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

plyne, že jsou funkce s, c buď identicky rovné nule, nebo platí $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

Návod: dosaďte $y = 0$ a použijte znalosti lineární algebry.