

Úlohy na cvičení 12. března 2024 z AN2

1. Odvoďte vzorce pro derivaci funkcí \arccos , \arctg .
2. Odvoďte Taylorův polynom v bodě nula stupně osm exponenciální funkce \exp .
3. Do jednoho obrázku načrtněte grafy *mocninných* funkcí f_1 , f_2 , f_3 , a odmocnin f_4 , f_5

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^3 \quad f_4(x) = \sqrt{x} \quad f_5(x) = \sqrt[3]{x}$$

Zvolte $a > 0$ a použijte grafy ke znázornění hodnot a^2 , a^3 , $a^{1/2}$, $a^{1/3}$.

Jak se na těchto grafech projeví monotonie *exponenciálních* funkcí?

A jak vám tato monotonie pomůže k přidání dalších grafů funkcí?

$$f_6(x) = x\sqrt{x} \quad f_7(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad f_8(x) = \sqrt[6]{x^7}$$

4. Nalezněte intervaly, na nichž je funkce f monotonní. Pokud umíte používat L'Hospitalovo pravidlo, tak navíc určete obor hodnot funkce f .

a. $f(x) = (x^2 - x - 1) \exp(-3x)$

b. $f(x) = \exp(2x^2 - x^4)$

c. $f(x) = x^2 \exp(-x)$

d. $f(x) = (2x - 1) \exp(-x^2)$

5. Vypočtěte limity

abcd.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3 \exp(2x) + \exp(3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{3 \exp(-2x) + \exp(3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(2x)}{\exp(2x) + \exp(3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(2x)}{\exp(2x) + \exp(3x)}$$

6. *Jazykový model přiřadí textu několik slov jako návrhy na jeho pokračování a ke každému slovu určí pravděpodobnost p_i jeho použití. Pak si model „hodí kostkou“ (tj. vygeneruje náhodné číslo) a podle výsledku hodu vybere jedno z navrhovaných slov pro pokračování textu.*

Pro vyladění „košatosti textu“ lze do procesu výběru zařadit tzv. teplotu T , pomocí které pravděpodobnosti p_1, \dots, p_N přepočítáme na

$$\frac{\exp(p_i/T)}{\sum_{i=1}^N \exp(p_i/T)}.$$

Vypočtěte tyto pravděpodobnosti pro $T \rightarrow 0^+$ a pro $T \rightarrow +\infty$. Úlohu si zjednodušte volbou $N = 2$, vypočtěte tedy limity výrazu

$$\frac{\exp(p_1/T)}{\exp(p_1/T) + \exp(p_2/T)}$$

7. Jakých hodnot nabývá pravděpodobnost v předchozí úloze pro $T \in (0, +\infty)$? Jinými slovy: určete obor hodnot funkce f .¹

$$f(T) = \frac{\exp(p_1/T)}{\exp(p_1/T) + \exp(p_2/T)}$$

(*8) Zamyslete se nad tím, proč je $2^0 = 1$, $2^{1/2} = \sqrt{2}$, $2^{-1} = 1/2$?

Proč a pro jaká $a \in \mathbb{R}$ a $p, q \in \mathbb{N}$ platí $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$, $a^{-p} = 1/a^p$?

Kde je chyba v $-1 = (-1)^3 = (-1)^{6/2} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$?

¹Pokud je pro vás úloha stále složitá, tak si ji znocu zjednodušte volbou například $p_1 = 0.7$, $p_2 = 0.3$.