Úlohy na cvičení 19. března 2024 z AN2

1. Vypočtěte limity

   a.
   $$\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6-4x^2}{\exp(x)} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6-4x^2}{\exp(x)}$$

   b.
   $$\lim_{x\to+\infty} x^2\sin(1/x) \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^5+200)\exp(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} (x^5+200)\exp(x)$$

   c.
   $$\lim_{x\to0^+} x^5\exp(1/x) \qquad \lim_{x\to0^-} x\exp(1/x) \qquad \lim_{x\to0} x\exp(1/x)$$

   d.
   $$\lim_{x\to0^+} x^5\exp(1/x^2) \qquad \lim_{x\to0^-} x\exp(1/x^2) \qquad \lim_{x\to0} x\exp(1/x^2)$$

*2. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to0} \operatorname{sgn}(\sin^2(x)) \qquad \lim_{x\to0} \cos(\operatorname{sgn}(x)) \qquad {}^*\lim_{x\to0} \operatorname{sgn}(x^2\sin^2(1/x))$$

(*3) Ukažte, že funkce f má v nule derivace všech řádů nulové a její Taylorův polynom libovolného stupně v tomto bodě je tedy nulový.

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

   ab.
   $$f(x) = \frac{\exp(4/x)}{\exp(2/x)+\exp(4/x)+\exp(8/x)}$$

   cd.
   $$f(x) = \frac{\exp(6/x)}{\exp(2/x)+\exp(6/x)+\exp(9/x)}$$

*5 Načrtněte grafy *hyperbolických funkcí* (hyperbolický sinus, kosinus, tangens, kotangens)

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

6. Nechte si softwarem vykreslit grafy funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus. Nad grafy přemýšlejte o vlastnostech těchto funkcí (monotonie, sudost, lichost, limity v nekonečnech). Jak byste tyto vlastnosti zjistili bez pohledu na graf?

(*7) Vyjádřete pomocí logaritmu funkce

(a) *hyperbolický arkus sinus* $\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1}$

(b) *hyperbolický arkus kosinus* $\operatorname{arccosh} = (\cosh|_{[0,+\infty)})^{-1}$

(c) *hyperbolický arkus tangens* $\operatorname{arctanh} = \tanh^{-1}$

(d) *hyperbolický arkus kotangens* $\operatorname{arccoth} = \coth^{-1}$

8. Určete definiční obor a obor hodnot funkcí f, g

a. $f(x) = \sqrt{x}\log(3x)$, $g(x) = \log(\sqrt{3x - x^2})$

b. $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $g(x) = \sqrt{x}\log(x)$

c. $f(x) = x^3\log(\sqrt{x})$, $g(x) = \log(5x - x^2)$

d. $f(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$, $g(x) = x\log(x)$

9. Odvoďte vzorec pro součet konečné a nekonečné geometrické řady.

10. Zvolte číslo s periodickým desetinným rozvojem a převeďte ho na podíl dvou celých čísel dvěma způsoby: jednak úpravami a dále sečtením nekonečné geometrické řady.

11. Zvolte dvě celá nenulová čísla a vypočtětete jejich podíl v desetinném tvaru. Pokud vám vyšel periodický desetinný rozvoj, tak se zamyslete, jestli to tak bude vždy. Přitom ukončený desetinný rozvoj považujeme také za periodický s periodou 0.

12. Určete, které z následujících řad mají součet a součty vypočtěte. Která z řad je konvergentní?

a.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{3^k} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{5^k} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} (-2)^k \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

b.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{3} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} (-3)^k \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

c.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{5}{3}\right)^k \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^k \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{4} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{4^k}$$

d.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{3^k} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{4} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{(-4)^k}$$

13. Uvažujme posloupnost kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ takovou, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}/a_n < q$. Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí $a_n < a_1 q^{n-1}$.[1]

(*14) Výraz x^{x^x} je chápán jako $x^{(x^x)}$.[2] Vypočtěte limity funkcí pro $x \to 0^+$.

$$f_2(x) = x^x \qquad f_3(x) = x^{f_2(x)} \qquad f_4(x) = x^{f_3(x)} \qquad f_5(x) = x^{f_4(x)}$$

[1] Pokud si s úlohou nevíte rady, začněte důkazem pro konkrétní hodnoty $n = 2, 3, 4 \ldots$.
[2] Upravte výraz $(x^x)^x$ tak, aby neobsahoval závorky.