Úlohy na cvičení 26. března 2024 z AN2

1. Zformulujte nutnou podmínku konvergence a zjistěte, co z ní plyne pro následující řady

   a.
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+5}{\sqrt{k^3}+2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{k^2+2}+\sqrt[3]{k+3}}{k^2+1}$$

   b.
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^5}+3}{k^4+6} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{k^2+2}+\sqrt[3]{k+3}}$$

   c.
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+6}{\sqrt{k^5}+3} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{k^4+3}+\sqrt[4]{k^3+2}}$$

   d.
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^3}+2}{k+5} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{k^4+3}+\sqrt[4]{k^3+2}}{k+1}$$

2. Zjistěte zda řady ze cvičení 1 konvergují. Použijte limitní srovnávací kritérium.

3. Vypočtěte součty řad
   $$S_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}, \qquad S = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \right)$$

*4. Rozmyslete si, že jste v předchozí úloze sečetli řadu
   $$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$$

5. Vypočtěte limity
   $$\lim_{x\to+\infty} x \log(1+1/x) \qquad \lim_{x\to+\infty} (1+1/x)^x$$

6. Z definice exponenciály a logaritmu odvoďte pro $A, B \in (0,+\infty)$, $c \in \mathbb{R}$ vzorce pro logaritmus[1]

   1. $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$
   2. $\log(A^c) = c \log(A)$

[1] Návod: v 1. zvolte $A = \exp(a)$, $B = \exp(b)$, ve 2. definici A^c.