Úlohy na cvičení 9. dubna 2024 z AN2

1. Zjistěte, zda následující řady absolutně konvergují

   a.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^3}{3^{2k+1}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{5k+7}}{k\sqrt{k+1}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$$

   b.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{k}}{k+100} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{3^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k3^k}{2^{2k}}$$

   c.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{(2k)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}+100}{k^2-200} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)2^k}{3^{3k-1}}$$

   d.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^{k+2}}{k^2 2^{2k+3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+1}$$

   a–d*
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+(-1)^k}{2^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2+3^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

2. Dokončete důkaz z přednášky:
   Máme kladné číslo q a posloupnost kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro která platí
$$(\forall k \in \mathbb{N})(a_{k+1}/a_k < q)$$
   a máme ukázat, že pak platí
$$(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \leq a_1 q^{k-1})$$
   Na přednášce jsme dokázali platnost pro $k = 1, 2, 3$. Dokažte platnost pro $k = 4, 5$ a poté dokažte indukční krok.

3. Úloha pro gamblery:

   Hraje se tak, že házíte kostkou a získáváte žetony od protihráče za každý hod, který není šestka. Hra končí, až padne šestka. Před každou hrou odevzdáte určitý počet žetonů protihráči, na kterém se dohodnete. Pod žetonem si představte cokoliv, o co jste ochotni hrát.

Vaším úkolem je určit, jak velká by měla být vstupenka do této hry. Uvažujte, že hru budete hrát opakovaně a vaše rozhodnutí by mělo minimalizovat celkové ztráty při opakovaných hrách.

Alternativní přístup: Určíte výši vkladu a já poté zvolím, kdo z nás bude házet kostkou. Poté si hru zahrajeme dvacet krát.