Úlohy na cvičení 16. dubna 2024 z AN2

1. Načrtněte graf závislosti rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase: $v = at$. Vzorec pro dráhu $s = \frac{1}{2}at^2$ odvoďte geometricky: přírůstek dráhy Δs je úměrný přírůstku času $\Delta s = v\Delta t$ a tento součin na grafu odpovídá obsahu obdélníku o stranách v, Δt.

2. Načrtněte graf funkce f a pro $t \in [a, b]$ vypočtěte obsah $S(t)$ mnohoúhelníka $M(t)$ (mezi osou x a grafem f v intervalu $[a, t]$).[1]

$$M(t) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, t], y \in [0, f(x)]\}$$

Výsledek zkontrolujte výpočtem derivace S'.

a. $a = 0$, $b = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [a, 2] \\ x + 1 & x \in (2, b] \end{cases}$$

b. $a = 0$, $b = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \in [a, 3] \\ 2 & x \in (3, b] \end{cases}$$

c. $a = 1$, $b = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \in [a, 2] \\ 3 & x \in (2, b] \end{cases}$$

d. $a = -1$, $b = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x \in [a, 1] \\ x + 3 & x \in (1, b] \end{cases}$$

3. Graf funkce f je sjednocením úseček AB, BC. Funkce S je zadaná stejně jako v předchozí úloze. Vypočtěte S a S'.

a. $A = [0, 4]$, $B = [3, 2]$, $C = [4, 2]$

b. $A = [1, 4]$, $B = [2, 3]$, $C = [4, 3]$

c. $A = [-1, 4]$, $B = [1, 4]$, $C = [3, 6]$

d. $A = [0, 3]$, $B = [2, 3]$, $C = [3, 4]$

[1] Čárka zde znamená konjunkci, tedy $x \in [a, t], y \in [0, f(x)]$ je totéž jako $x \in [a, t] \wedge y \in [0, f(x)]$

4. U funkce f v zadání úlohy 2 změníme hodnotu v konstantní části. Vypočtěte S i S' i pro toto změněné zadání.

   a. $a = 0$, $b = 3$
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, 2] \\ x + 1 & x \in (2, b] \end{cases}$$

   b. $a = 0$, $b = 4$
   $$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \in [a, 3] \\ 4 & x \in (3, b] \end{cases}$$

   c. $a = 1$, $b = 4$
   $$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \in [a, 2] \\ 1 & x \in (2, b] \end{cases}$$

   d. $a = -1$, $b = 3$
   $$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [a, 1] \\ x + 3 & x \in (1, b] \end{cases}$$

5. Jakou vlastností se liší funkce f ve druhé a čtvrté úloze? Jak se tato vlastnost projeví na grafu funkce f? Jak na grafu funkce S?

6. Čemu je rovna derivace S', je-li $S(t)$ rovno obsahu množiny $M(t)$?
   $$M(t) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, t], y \in [0, 1 - x^2]\}$$
   Čemu je rovna funkce S?

7. Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

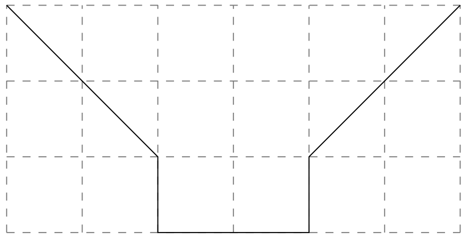
   (a) Definujte funkce S, V, které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny h.

   (b) Načrtněte graf funkce S.

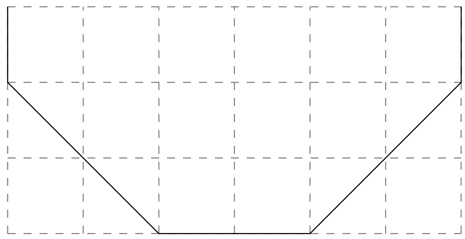
   (c) Výpočtěte derivaci V'. Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?

   (d) Úloha na prostorovou představivost: co vám nádoba připomíná? Kde jste viděli nádobu podobného tvaru?

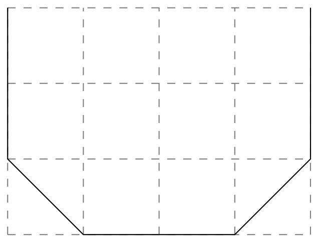
   a.



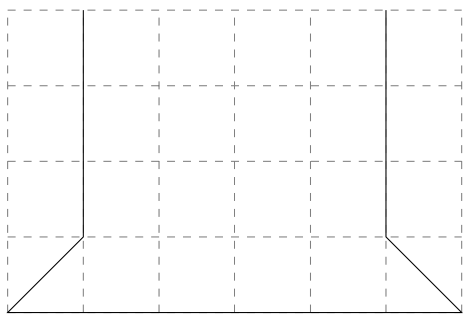
b.



c.



d.



8. Hra *kolikrát hodíš, než ti padne šestka*:
   Pořiďte si hrací kostku, mnohokrát s ní hoďte a počítejte vždy počet hodů, ve kterých za sebou nepadne šestka.

   Příklad:
   jsou-li hody: 5 4 1 6 3 3 1 2 6 6 5 5 4 1 6 2 2 1,
   zapište si počty: 3, 4, 0, 4 (posloupnost 2 2 1 za poslední šestkou neuvažujeme).

   Vaším úkolem je určit průměrnou hodnotu těchto počtů. V našem případě je průměr roven $(3 + 4 + 0 + 4)/4 = 3.75$. Budete-li házet dostatečně dlouho, bude se průměr blížit hodnotě, kterou nazýváme *střední hodnotou.*

   Střední hodnotu můžete spočítat i jako součet nekonečné řady:
   Hodíme-li n-krát, padne šestka hned v prvním hodu přibližně v $n/6$

případech. Kolikrát padne na druhý hod? V $5n/6$ případech nepadne poprvé a v šestině těchto případů (tedy v $5n/6 \times 1/6$) padne napodruhé. Podobně spočítáme, že napotřetí padne přibližně v $5n/6 \times 5/6 \times 1/6 = 5^2n/6^3$ případech.

Součet hodů tedy bude přibližně

$$0 \times \tfrac{n}{6} + 1 \times \tfrac{5n}{36} + 2 \times \tfrac{5^2n}{6^3} + \cdots$$

a průměr bude přibližně

$$\frac{0 \times \frac{n}{6} + 1 \times \frac{5n}{36} + 2 \times \frac{5^2n}{6^3} + \cdots}{n}$$

Zbývá tedy pokrátit n a sečíst řadu.