# Úlohy na cvičení 16. dubna 2024 z AN2

1. Načrtněte graf závislosti rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase: $v = at$.
   Odvoďte geometricky vzorec pro dráhu: přírůstek dráhy $\Delta s$ je úměrný přírůstku času $\Delta s = v\Delta t$ a tento součin na grafu odpovídá obsahu obdélníku o stranách $v$, $\Delta t$.[1]

2. Odvoďte závislost dráhy $s$ na čase $t$ pro rovnoměrný pohyb s rychlostí $v_0 > 0$ v čase $t \in [t_1, t_2]$ a rovnoměrně zrychlený se zrychlením $a > 0$ v čase $t \in [t_2, t_3]$.[2]
   Dráhu počítejte od okamžiku $t = t_1$ (tj. $s(t_1) = 0$).

3. Načrtněte graf funkce $f$ a pro $t \in [a, b]$ vypočtěte obsah $S(t)$ mnohoúhelníka $M(t)$ (mezi osou $x$ a grafem $f$ v intervalu $[a, t]$).[3]

$$M(t) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, t], y \in [0, f(x)]\}$$

   Výsledek zkontrolujte výpočtem derivace $S'$.

   a. $a = 0$, $b = 3$
   $$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [a, 2] \\ x + 1 & x \in (2, b] \end{cases}$$

   b. $a = 0$, $b = 4$
   $$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \in [a, 3] \\ 2 & x \in (3, b] \end{cases}$$

   c. $a = 1$, $b = 4$
   $$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \in [a, 2] \\ 3 & x \in (2, b] \end{cases}$$

   d. $a = -1$, $b = 3$
   $$f(x) = \begin{cases} 4 & x \in [a, 1] \\ x + 3 & x \in (1, b] \end{cases}$$

4. Přeformulujte úlohu 3 jako fyzikální úlohu. Inspirujte se úlohou 2.

5. Graf funkce $f$ je sjednocením úseček $AB$, $BC$. Funkce $S$ je zadaná stejně jako v předchozí úloze. Vypočtěte $S$ a $S'$.

---

[1] Připomeňme, že vyjde známý vzorec $s = \frac{1}{2}at^2$.

[2] Předpokládáme $t_1 < t_2 < t_3$.

[3] Čárka zde znamená konjunkci, tedy $x \in [a, t], y \in [0, f(x)]$ je totéž jako $x \in [a, t] \wedge y \in [0, f(x)]$.

a. $A = [0, 4]$, $B = [3, 2]$, $C = [4, 2]$

b. $A = [1, 4]$, $B = [2, 3]$, $C = [4, 3]$

c. $A = [-1, 4]$, $B = [1, 4]$, $C = [3, 6]$

d. $A = [0, 3]$, $B = [2, 3]$, $C = [3, 4]$

6. U funkce $f$ v zadání úlohy 3 změníme hodnotu v konstantní části. Vypočtěte $S$ i $S'$ i pro toto změněné zadání.

   a. $a = 0$, $b = 3$
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, 2] \\ x + 1 & x \in (2, b] \end{cases}$$

   b. $a = 0$, $b = 4$
   $$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \in [a, 3] \\ 4 & x \in (3, b] \end{cases}$$

   c. $a = 1$, $b = 4$
   $$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x \in [a, 2] \\ 1 & x \in (2, b] \end{cases}$$

   d. $a = -1$, $b = 3$
   $$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [a, 1] \\ x + 3 & x \in (1, b] \end{cases}$$

7. Výsledky třetí a šesté úlohy zkontrolujte ověřením

   (a) $S'(t) = f(t)$

   (b) $S(a) = 0$

   (c) Funkce $S$ je spojitá na intervalu $[a, b]$.

8. Jakou vlastností se liší funkce $f$ ve třetí a šesté úloze? Jak se tato vlastnost projeví na grafu funkce $f$? Jak na grafu funkce $S$?

9. Jak se na pohybu projeví nespojitost v úloze 6, pokud ji přeformulujeme jako úlohu 2?
   Vysvětlete, proč je funkce $S$ spojitá a jak by se projevila případná nespojitost ve fyzikální interpretaci?

10. Čemu je rovna derivace $S'$, je-li $S(t)$ rovno obsahu množiny $M(t)$?
   $$M(t) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, t], y \in [0, 1 - x^2]\}$$
   Čemu je rovna funkce $S$?

11. Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

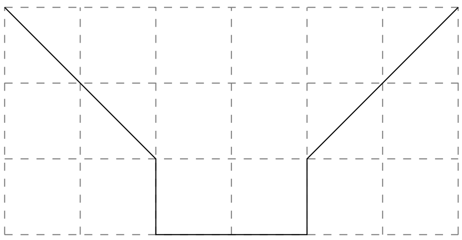
(a) Definujte funkce $S$, $V$, které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny $h$.

(b) Načrtněte graf funkce $S$.

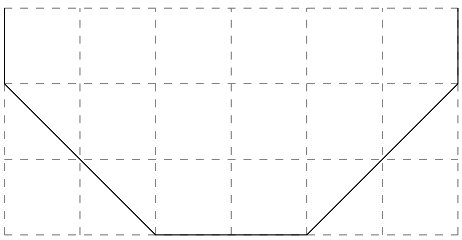
(c) Výpočtěte derivaci $V'$. Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?

(d) Úloha na prostorovou představivost: co vám nádoba připomíná? Kde jste viděli nádobu podobného tvaru?

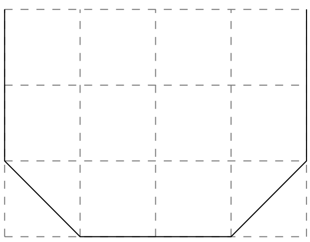
a.



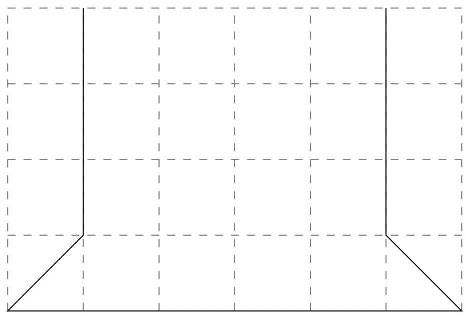
b.



c.



d.



12. Hra *kolikrát hodíš, než ti padne šestka*:
    Pořiďte si hrací kostku, mnohokrát s ní hoďte a počítejte vždy počet hodů, ve kterých za sebou nepadne šestka.

    Příklad:
    jsou-li hody: 5 4 1 6 3 3 1 2 6 6 5 5 4 1 6 2 2 1,
    zapište si počty: 3, 4, 0, 4 (posloupnost 2 2 1 za poslední šestkou neuvažujeme).

    Vaším úkolem je určit průměrnou hodnotu těchto počtů. V našem případě je průměr roven $(3 + 4 + 0 + 4)/4 = 3.75$. Budete-li házet dostatečně dlouho, bude se průměr blížit hodnotě, kterou nazýváme *střední hodnotou.*

    Střední hodnotu můžete spočítat i jako součet nekonečné řady:

    Hodíme-li $n$-krát, padne šestka hned v prvním hodu přibližně v $n/6$ případech.

    Kolikrát padne na druhý hod? V $5n/6$ případech nepadne poprvé a v šestině těchto případů (tedy v $5n/6 \times 1/6$) padne napodruhé.

    Podobně spočítáme, že napotřetí padne přibližně v $5n/6 \times 5/6 \times 1/6 = 5^2n/6^3$ případech.

    Součet hodů tedy bude přibližně

    $$0 \times \tfrac{n}{6} + 1 \times \tfrac{5n}{36} + 2 \times \tfrac{5^2n}{6^3} + \cdots$$

    a průměr bude přibližně

    $$\frac{0 \times \frac{n}{6} + 1 \times \frac{5n}{36} + 2 \times \frac{5^2n}{6^3} + \cdots}{n}$$

    Zbývá tedy pokrátit $n$ a sečíst řadu.