

Úlohy na cvičení 14. května 2024 z AN2

1. Udělejte hrubý náčrtek obrazce O a hrubý odhad jeho obsahu a poté obsah vypočítejte. Pokud se obrazec skládá z více částí, vyberte si pro výpočet jednu z nich.¹

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- a. $f(x) = x \sin(x)$
- b. $f(x) = (2x - x^2) \exp(x)$
- c. $f(x) = \sin^5(x)$
- d. $f(x) = x^2 \log(1/x)$

2. Vypočítejte třemi různými způsoby integrál²

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx$$

- (a) Neurčitý integrál převed'te metodou per partes na

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) dx$$

a integrál na pravé straně upravte na

$$\int \cos^2(x) dx = \int 1 - \sin^2(x) dx = \int 1 dx - \int \sin^2(x) dx.$$

Tím dostanete rovnici pro hledaný integrál.

- (b) Použijte vzorec

$$\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$$

- (c) Použijte náčrtky ke zdůvodnění vztahu

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$$

a vzorec k výpočtu součtu

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$$

¹K určení částí se vám budou hodit kořeny funkce f .

²Dvě z nich naleznete v kapitole 14.8 na straně 216 textu https://kma.fp.tul.cz/~simunkova/analyza/Ucebni_text.pdf

3. Proveďte substituci $x = 3 \sin(t)$ v integrálu $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$

4. Odvoďte rekurentní formuli pro integrál³

$$\int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx$$

a odtud pro určitý integrál a $n \geq 2$

$$\int_0^\pi \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2}(x) dx$$

5. Použijte odvozenou formuli k výpočtu integrálů

$$\int_0^\pi \sin^4(x) \cos^2(x) dx, \quad \int_0^\pi \sin^7(x) dx$$

6. Nalezněte primitivní funkci k funkci r na množině \mathbb{R} .⁴

a. $r(x) = \frac{x^3 - 2}{(x^2 + 5)^2}$

b. $r(x) = \frac{x^2 + 3x}{(x^2 + 3)^2}$

c. $r(x) = \frac{x^2 + x - 5}{(x^2 + 2)^2}$

d. $r(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{(x^2 + 6)^2}$

³Odvození i s příklady najdete v kapitole 4.4 na straně 33 textu https://kma.fp.tul.cz/~simunkova/analyza/Vypocet_integralu.pdf

⁴Tamtéž v kapitole 5.5 na straně 42 naleznete dvěma různými způsoby řešený příklad.