Vlastnosti exponenciální funkce

Exponenciální funkci jsme definovali axiomaticky

1. $D(\exp) = \mathbb{R}$
2. $$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Z axiomů jsme odvodili vlastnosti (A – E je shodné s a – e, f – h jsem rozložila na více kroků)

A. $$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) \geq 0)$$

B. $$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) > 0)$$

C. $$\exp(0) = 1$$

D. $$\exp'(0) = 1$$

E. $$\exp'(x) = \exp(x)$$

F. exp je rostoucí na $\mathbb{R}$ (plyne z B, E)

G. $$(\forall x < 0)(\exp(x) \in (0, 1))$$

   plyne z B, C, F

H. $$(\forall x > 0)(\exp(x) > 1)$$

   plyne z C, F

I. $$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) \geq x + 1)$$

   Pro funkci $f(x) = \exp(x) - (x+1)$ a její derivaci $f'(x) = \exp(x) - 1$ plyne z G, H monotonie a minimum v bodě nula. Odtud pak plyne I.

J.
$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

plyne z I a z obdoby ppolicejní věty pro nekonečnou limitu (horní policajt je nahrazem nekonečnem).

K.
$$(\forall a \in \mathbb{R}) \left(\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \right)$$

plyne z C a z axiomu 2 volbou $x = a$, $y = -a$

L.
$$\lim_{x\to+\infty} \exp(-x) = 0$$

plyne z J, K

M.
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

plyne z věty o limitě složené funkce a z L

M. Obor hodnot exponenciální funkce je $H(\exp) = (0, +\infty)$.
plyne z F, J, M