Písemná část zkoušky z AN2

1. června 2024

1. Pro funkce f, g určete definiční obor a body, v nichž má funkce odstranitelnou nespojitost

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3-x}{x}\right) \qquad g(x) = \frac{\exp(5/x)}{\exp(1/x)+\exp(5/x)+\exp(8/x)}$$

1* Pro funkce, které jsou součtem a součinem zadaných funkcí, tedy funkce s, p, určete druh nespojitosti.

$$\begin{aligned} s(x) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{3-x}{x}\right) + \frac{\exp(5/x)}{\exp(1/x)+\exp(5/x)+\exp(8/x)} \\ p(x) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{3-x}{x}\right) \frac{\exp(5/x)}{\exp(1/x)+\exp(5/x)+\exp(8/x)} \end{aligned}$$

2. Určete intervaly, na nichž je funkce f rostoucí. Stačí uvést intervaly na jedné periodě funkce f.

$$f(x) = \sin(x) + \cos^2(x)$$

2* Z náčrtku grafu funkce f určete, pro které/-á $a \in \mathbb{R}$ má rovnice $f(x) = a$ právě dvě řešení na intervalu $x \in [0, 2\pi)$.

3. Zjistěte, zda následující řady absolutně konvergují.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 3^{k-1}}{2^{k+3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+1}$$

3*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \frac{k^2 3^{k-1}}{2^{k+3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\sin(k)}{k^2+1}$$

4. Nalezněte primitivní funkce k funkcím f, g a udělejte zkoušku.

$$f(x) = x\exp(-x^2/2) \qquad g(x) = x^2\log(x)$$

4*

$$f(x) = x^3\exp(-x^2/2) \qquad g(x) = x\log(x^2)$$

5. Načrtněte obrazec M, který leží v prvním kvadrantu a shora je omezen grafem funkce f. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce M kolem osy x.

$$f(x) = 2 - \sqrt{x}$$

5* Rotací obrazce M okolo osy x případně y vzniknou dvě rozdílná tělesa. Odhadněte, které z nich má větší objem a oba objemy vypočtěte.