Písemná část zkoušky z AN2

14. června 2024

1. Určete intervaly, na nichž je funkce f rostoucí. Stačí uvést intervaly na jedné periodě funkce f.

$$f(x) = \sin(x) + \cos^2(x)$$

1* Z náčrtku grafu funkce f určete, pro které/-á $a \in \mathbb{R}$ má rovnice $f(x) = a$ právě jedno řešení na intervalu $x \in [0, 2\pi)$.

2. Zjistěte, zda následující řady absolutně konvergují.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{k^2 2^{k+3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^3+1}$$

2*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \frac{3^{k-1}}{k^2 2^{k+3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\sin(k)}{k^3+1}$$

3. Nalezněte primitivní funkce k funkcím f, g a udělejte zkoušku.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) \qquad g(x) = (\exp(3x) + 1)^2$$

3* Nalezněte primitivní funkci k funkci f a udělejte zkoušku

$$f(x) = 4x \operatorname{arctg}(x^2)$$

4. Načrtněte obrazec M, který leží v prvním kvadrantu a shora je omezen grafem funkce f. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce M kolem osy x.

$$f(x) = 3 - \sqrt{x}$$

4* Rotací obrazce M okolo osy x případně y vzniknou dvě rozdílná tělesa. Odhadněte, které z nich má větší objem a oba objemy vypočtěte.

5. Vypočtěte určité integrály funkce f přes intervaly: $I_1 = [-\pi, \pi]$, $I_2 = [0, 2\pi]$, $I_3 = [0, 3\pi]$.

$$f(x) = \frac{8}{3 - 2\sin(x) + \cos(x)}$$

5* Určete primitivní funkci k funkci f na intervalu $(0, 2\pi)$.