Úlohy k přípravě na zkoušku z AN2

Definitivní verze

30. 5. opraveno zmatečné značení bodů v úloze 7.

1a Pro funkce f, g určete definiční obor a body, v nichž má funkce odstranitelnou nespojitost

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad g(x) = \frac{\log(x^2)}{x+1}$$

1b

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(1/x) \qquad g(x) = \frac{x+2}{\log(x^2)}$$

1c

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \qquad g(x) = x\log(x^2)$$

1d

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3+x}{x^2}\right) \qquad g(x) = \exp\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)$$

1e

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1/x) \qquad g(x) = \exp\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

1f

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1/x^2) \qquad g(x) = x\exp(1/x)$$

1g

$$f(x) = x^2\sin(1/x) \qquad g(x) = \exp\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$$

1h

$$f(x) = (\operatorname{arctg}(1/x))^2 \qquad g(x) = \frac{\exp(1/x)}{\exp(1/x)+\exp(2/x)+\exp(3/x)}$$

1i

$$f(x) = (\operatorname{arccotg}(1/x))^2 \qquad g(x) = \frac{\exp(2/x)}{\exp(1/x)+\exp(2/x)+\exp(3/x)}$$

1j

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(1/x^2) \qquad g(x) = \frac{\exp(3/x)}{\exp(1/x)+\exp(2/x)+\exp(3/x)}$$

2a Nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí

$$f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$$

2b

$$f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$$

2c

$$f(x) = 3\sin^2(x) + 4\cos^3(x)$$

2d

$$f(x) = \sin(x)\cos^3(x)$$

2e

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2f

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(1/x)$$

2g

$$f(x) = \arcsin(3x - 2)$$

2h

$$f(x) = \arcsin\sqrt{x - x^2}$$

2i

$$f(x) = \arcsin(2x^2 + 2x)$$

2j

$$f(x) = \frac{\log(x)}{\sqrt{x^5}}$$

2k

$$f(x) = \sqrt{x^3}\,\log(x)$$

2l

$$f(x) = \frac{x^2}{\log(x)}$$

2m

$$f(x) = \log(x^3 - 12x)$$

2n

$$f(x) = (x^2 - 2)\exp(2x)$$

2o
$$f(x) = \exp \frac{x+1}{x^2-1}$$

2p
$$f(x) = (x^2 + x + 1) \exp(x)$$

2q
$$f(x) = (2x-1) \exp(-x^2)$$

2r
$$f(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x)}$$

2s
$$f(x) = \frac{\exp(2x)}{\exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x)}$$

2t
$$f(x) = \frac{\exp(3x)}{\exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x)}$$

3a – t Určete definiční obor a obor hodnot funkce f. Funkce stejné jako v předchozí úloze.

4a Vypočtěte Taylorův polynom stupně čtyři v bodě nula funkce tangens.

4b Funkce arkustangens, v bodě nula, stupně čtyři.

4c Funkce $f(x) = \log \sqrt{x}$ v bodě jedna stupně čtyři.

4d Funkce $f(x) = \exp(x^2)$ v bodě nula stupně čtyři.

4e Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(3x)$ v bodě nula stupně čtyři.

4f Funkce $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$ v bodě nula stupně čtyři.

5. Určete, zda následující řady splňují nutnou podmínku konvergence. Co odtud plyne pro konvergenci řady?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^3 - 2k + 3} - 6k}{k^2 - 3k + 7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 3k + 7}{\sqrt{k^3 - 2k + 3} - 6k}$$

6a Zjistěte, zda následující řady absolutně konvergují.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{3^{2k+1}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{5k+7}}{k\sqrt{k+1}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$$

6b

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+100} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{3^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k3^k}{2^{2k}}$$

6c

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k!}{(2k)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}+100}{k^2-200} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)2^k}{3^{3k-1}}$$

6d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{k^2 2^{2k+3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+1}$$

7. Graf funkce f je sjednocením úseček AB, CD. Načrtněte tento graf a pro $t \in (-1, 4]$ vypočtěte obsah $S(t)$ mnohoúhelníka $M(t)$ (mezi osou x a grafem f v intervalu $[-1, t]$). K výpočtu použijte prostředky elementární geometrie.

   Načrtněte graf funkce S a výsledek zkontrolujte výpočtem derivace S'.

$$A = [-1, 2], B = [1, 2], C = [1, 4], D = [4, 1]$$
$$M(t) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, t], y \in [0, f(x)]\}$$

8a Nalezněte primitivní funkce k funkcím f, g a udělejte zkoušku.

$$f(x) = x^2 \sin(x), \qquad g(x) = 6x\sqrt{x^2+2}$$

8b

$$f(x) = \operatorname{tg}(x), \qquad g(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

8c

$$f(x) = x^2 \log(x), \qquad g(x) = \frac{\exp(x)}{1+\exp(2x)}$$

8d

$$f(x) = x^3 \cos(x), \qquad g(x) = \frac{\exp(3x)-\exp(-2x)}{\exp(x)}$$

8e

$$f(x) = (1-x^2)\exp(x), \qquad g(x) = \frac{x}{2+\sqrt{x}}$$

8f

$$f(x) = \sin^2(x), \qquad g(x) = x\exp(-x^2)$$

8g

$$f(x) = (2x+1)^3, \qquad g(x) = \arcsin(x)$$

8i

$$f(x) = \log(x), \qquad g(x) = \cos^2(x)$$

8j

$$f(x) = \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right) : \left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\right), \qquad g(x) = (1-x)^4$$

8k

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}, \qquad g(x) = \frac{\log(x)}{x}$$

8l*

$$f(x) = x\sin^2(x), \qquad g(x) = (\log(x))^2$$

8m*

$$f(x) = x\sin^3(x), \qquad g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$$

8n*

$$f(x) = (\log(x))^3, \qquad g(x) = (\arcsin(x))^2$$

9a Vypočtěte určitý integrál. Z hrubého náčrtku grafu funkce určete znaménko integrálu.

$$\int_0^\pi \sin^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

9b

$$\int_0^\pi x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

9c

$$\int_0^1 x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$

9d

$$\int_{-\infty}^0 x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$

9e

$$\int_{-1}^2 x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$

9f

$$\int_0^1 x^2 \log(x)\,\mathrm{d}x$$

9g

$$\int_0^1 x^3 \exp(x)\,\mathrm{d}x$$

9h

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x$$

9i

$$\int_0^1 \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$$

9j

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x$$

10a Vypočtěte určitý integrál.

$$\int_{-1}^1 \left|x\sqrt{x^2+8}\right|\,\mathrm{d}x$$

10b

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

10c

$$\int_0^2 \sqrt{(x^2-1)^4}\,\mathrm{d}x$$

10d

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2(x^2+8)}\,\mathrm{d}x$$

11a Načrtněte obrazec M, který leží v prvním kvadrantu a shora je omezen grafem funkce f. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce M kolem osy x.

$$f(x) = (2-x)\exp(x)$$

11b

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

11c

$$f(x) = 2 - \sqrt{x}$$

11d

$$f(x) = 4 - x^2$$

11e*

$$f(x) = (x^2 - x)\log(x)$$

12a Nalezněte primitivní funkci k funkci f na množině $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{(x^2 + 2)^2}$$

12b

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{(x^2 + 3)^2}$$

12c

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{(x^2 + 5)^2}$$

12d

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{(x^2 + 6)^2}$$

13a Vypočtěte určité integrály funkce f přes intervaly: $I_1 = [-\pi, \pi]$, $I_2 = [0, \pi]$, $I_3 = [0, 2\pi]$, $I_4 = [0, 3\pi]$.

$$f(x) = \frac{6}{2 + \sin(x) - \cos(x)}$$

13b

$$f(x) = \frac{8}{3 - 2\sin(x) + \cos(x)}$$

13c

$$f(x) = \frac{3}{3 + \sin(x) + 2\cos(x)}$$