6. týden: Přečtěte 1 – 4, vyřešte úlohy v 4.

7. týden: Přečtěte 5 – 9, vyřešte úlohy v 9.

8. týden: Přečtěte 10 – 12, vyřešte úlohy v 12.

9. týden: Přečtěte 13 – 21, vyřešte úlohy v 17, 20, 21 a k 18 přidejte vlastní příklad.

10. týden: Přečtěte 22 – 30, k příkladům v 29 přidejte dva vlastní a vyřešte úlohy v 30.

Číselné množiny

11. února 2025

Cíl: Zopakovat a doplpnit znalosti množin reálných, přirozených, celých, racionálních čísel.

1. Značení. Symboly $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ budeme značit množinu reálných čísel, celých čísel a racionálních čísel. Množinu přirozených čísel včetně nuly budeme značit symbolem $\mathbb{N}_0$, množinu kladných přirozených čísel symbolem $\mathbb{N}^+$. Pokud budeme psát (mluvit) o množině přirozených čísel slovně (tj. bez použití matematických symbolů), budeme pro $\mathbb{N}^+$ používat označení *kladná přirozená čísla* a pro $\mathbb{N}_0$ označení *nezáporná přirozená čísla*.

Symbol $\mathbb{N}$ použijeme v případě, kdy naše tvrzení platí v obou případech, tedy pro $\mathbb{N}_0$ i pro $\mathbb{N}^+$.

2. Co jsou přirozená čísla. Neuvedeme definici množiny přirozených čísel, spolehneme se, že každý*á student*ka má představu, o čem mluvíme. Jen poznamenejme, že mezi matematiky není shoda, zda je nula přirozené číslo. Proto jsme výše zavedli značení $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}^+$.

3. Matematická indukce, vlastnosti přirozených čísel. Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ má následující vlastnosti

1. Množina $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek, tj. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq n_0$. Formálně zapsáno

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0)$$

2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je následující prvek $n+1$ také přirozeným číslem.

3. Pokud množina $A \subseteq \mathbb{N}$ splňuje (i), (ii), pak je $A = \mathbb{N}$

   (i) $n_0 \in A$ (kde n_0 je nejmenší prvek množiny $\mathbb{N}$)

   (ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$

Vlastnost 3 umožňuje důkaz matematickou indukcí. Označíme-li množinu čísel $n \in \mathbb{N}$ majících určitou vlastnost[1] symbolem A a dokážeme, že množina A má vlastnosti (i), (ii), pak jsme dokázali, že danou vlastnost mají všechna přirozená čísla.

4. Úlohy. Dokažte matematickou indukcí výroky

1.
$$(\forall n \in \mathbb{N}^+)(6/(n^3+5n))$$

2.
$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)((1/2)^n \leq 1)$$

[1]Například: číslo $n^3 + 5n$ je dělitelné číslem šest, formálně zapíšeme $A := \{n \in \mathbb{N} : 6/(n^3+5n)\}$.

5. Další příklad na matematickou indukci – AG nerovnost. V dalším odstavci definujeme aritmetický a geometrický průměr souboru čísel a dokážeme nerovnost, kterou tyto průměry splňují.

Důkaz provedeme matematickou indukcí, ale postup se bude lišit od standardního postupu. Indukční krok provedeme ve dvou krocích.

A. Dokážeme implikaci: pokud platí (1) pro $n = N$, pak platí i pro $n = 2N$

B. a implikaci: pokud platí (1) pro $n = N$, pak platí i pro $n = N - 1$.

6. Definice aritmetického a geometrického průměru. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Aritmetickým průměrem čísel $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$ nazýváme číslo

$$A := \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

geometrickým průměrem číslo

$$G := \sqrt[n]{\Pi_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

7. Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$. Pak platí

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)^n \geq \Pi_{k=1}^{n} a_k \tag{1}$$

Poznámka: nerovnost jsme uvedli ve tvaru $A^n \geq G^n$, která je pro $A, G \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ ekvivalentní s $A \geq G$.

8. Důkaz AG nerovnosti provedeme matematickou indukcí.

1. $n = 2$: chceme dokázat nerovnost

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \geq a_1 a_2$$

Úloha: převeďte nerovnost ekvivalentními úpravami na nerovnost, o které umíte rozhodnout, že platí ($(a_1 - a_2)^2 \geq 0$).

2A Rozepíšeme

$$\frac{\sum_{k=1}^{2N} a_k}{2N} = \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{2N} a_k}{2N} = \frac{\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k}{N} + \frac{\sum_{k=N+1}^{2N} a_k}{N}}{2}$$

Označíme

$$A_1 = \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k}{N}, \qquad A_2 = \frac{\sum_{k=N+1}^{2N} a_k}{N}$$

Z platnosti (1) pro $n = 2$ plyne

$$\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right)^2 \geq A_1 A_2$$

Z indukčního předpokladu plyne

$$A_1^N \geq \Pi_{k=1}^N a_k, \qquad A_2^N \geq \Pi_{k=N+1}^{2N} a_k,$$

Odtud dostaneme

$$\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right)^{2N} \geq A_1^N A_2^N \geq \Pi_{k=1}^N a_k, \Pi_{k=N+1}^{2N} a_k, = \Pi_{k=1}^{2N} a_k$$

a odtud plyne platnost (1) pro $n = 2N$

2B Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$, nechť $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{R}$.
Zvolme

$$a_N := \frac{\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{N-1}$$

Upravíme[2]

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k}{N} = \frac{a_N + \sum_{k=1}^{N-1} a_k}{N} = \frac{a_N + (N-1)a_N}{N} = a_N$$

Z indukčního předpokladu plyne

$$a_N^N \geq \Pi_{k=1}^N a_k$$

Předchozí nerovnost pokrátíme $a_N > 0$ a dostaneme

$$a_N^{N-1} \geq \Pi_{k=1}^{N-1} a_k$$

a odtud plyne platnost (1) pro $n = N - 1$.

9. Úlohy.

1. Udělejte podrobně indukční krok 2A pro $N = 2$, $N = 4$.

2. Udělejte podrobně indukční krok 2B pro $N = 4$, $N = 8$, $N = 7$.

10. Co jsou celá čísla. Množinu celých čísel dostaneme z množiny kladných přirozených čísel přidáním nuly a opačných čísel k přirozeným číslům. Formálně zapíšeme

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\} \cup \{-k : k \in \mathbb{N}^+\}$$

[2]Výsledek znamená, že přidáním aritmetického průměru k souboru dat nezměníme aritmetický průměr souboru.

Čteme: Množina celých čísel je sjednocením množiny kladných přirozených čísel s jednoprvkovou množinou obsahující nulu a s množinou čísel opačných ke kladným přirozeným číslům.

11. Definice racionálních čísel. Množina racionálních čísel je definovaná jako množina podílů celého čísla a kladného přirozeného čísla. Formálně tuto definici zapíšeme

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Nevýhoda této definice je, že předpokládá znalost podílu celých čísel, tedy v podstatě znalost reálných čísel. Především znalost rovnosti dvou různých podílů, například rovnost $1/2 = 3/6$.

Filosofové starověkého Řecka pracovali pouze s přirozenými čísly a s jejich poměry, které odpovídají kladným racionálním číslům. Rovnost poměrů $a : b$, $c : d$ je možné vyjádřit ve světě přirozených čísel vztahem $ad = bc$.

12. Úloha. Při řešení úlohy použijte kalkulačku k násobení přirozených čísel. Žádné další výpočty neprovádějte.

Zjistěte, zda se rovnají racionální čísla 111/219, 259/511.

13. Jak se definují reálná čísla. Níže budeme definovat reálná čísla jako matematickou strukturu – tím máme na mysli nejen množinu čísel, ale i dvě operace (sčítání a násobení reálných čísel) a jednu relaci (porovnání, které ze dvou reálných čísel je větší a které menší). Vlastnosti operací a relace sepíšeme do axiomů.

V matematických teoriích je takováto axiomatická definice běžná a po definici zpravidla následuje důkaz existence takové struktury.

My v tomoto textu existenci struktury dokazovat nebudeme, je mimo naše, především časové, možnosti. *Spokojíme se s představou množiny reálných čísel jako množiny bodů na číselné ose* a s porozuměním axiomům.

14. Značení a terminologie. Operaci sčítání jste zvyklí značit symbolem $+$, součet čísel a, b symbolem $a+b$. My se zde budeme na sčítání dívat jako na zobrazení, které dvojici čísel a, b přiřadí součet $a+b$. Množinu dvojic reálných čísel budeme značit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a nazývat kartézským součinem množiny $\mathbb{R}$ s množinou $\mathbb{R}$. Podobně pro libovolnou množinu M je kartézský součin $M \times M$ množina uspořádaných dvojic (a, b) prvků $a, b \in M$. Formálně zapsáno

$$M \times M := \{(a, b) : a \in M, b \in M\}$$

Čteme: Kartézský součin M krát M je množina uspořádaných dvojic (a,b) prvků a,b z množiny M.

Sčítání je pak zobrazení množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$. Formálně zapsáno $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Podobně zapíšeme násobení jako zobrazení
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Výsledek násobení čísel a, b budeme psát $a \cdot b$, případně zkráceně ab, pokud nebude hrozit nedorozumění.

Relace $<$ přiřadí dvojici čísel a, b pravdivostní hodnotu výroku $a < b$. Formálně zapsáno
$<: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{\text{platí}, \text{neplatí}\}$.
případně můžeme zkrátit platí a neplatí na hodnoty 1 pro platí a 0 pro neplatí.
$<: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{1; 0\}$.

Zobrazení $M \times M \to \{1; 0\}$ nazýváme *relací na množině* M. Zobrazení $<$ je tedy zároveň relace na množině reálných čísel. Pomocí relace $<$ definujeme další tři relace $>$, $\leq$, $\geq$:
$x > y$ je totéž jako $y < x$,
$x \leq y$ platí právě když je $x = y$ nebo platí $x < y$,
$x \geq y$ je totéž jako $y \leq x$.

Formálně zapsáno
$x > y := y < x$,
$x \leq y := x = y \vee x < y$,
$x \geq y := y \leq x$.

15. Příklady. Rozmyslete si, že platí:

1. $1 < 2$,
2. $1 \leq 2$,
3. pokud platí $x < y$, pak platí $x \leq y$, formálně zapsáno
$$x < y \Rightarrow x \leq y$$
4. pokud platí $x < y$ pak neplatí $x > y$, formálně zapsáno
$$x < y \Rightarrow \neg(x > y)$$
5. $x > y$ platí právě když $x \leq y$ neplatí, formálně zapsáno
$$x > y \Leftrightarrow \neg(x \leq y)$$

16. Prvních dvanáct axiomů reálných čísel.

Operace sčítání na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ splňuje

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x + y = y + x)$

   Říkáme, že sčítání je komutativní.
2. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x + (y + z) = (x + y) + z)$

   Říkáme, že sčítání je asociativní.

   Toto pravidlo nám umožňuje vynechat závorky a psát $x + y + z$.

3. $(\exists\, 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + 0 = x)$

   Prvek 0 s touto vlastností nazýváme buď nulou, nebo nulovým prvkem, nebo též neutrálním prvkem sčítání.

4. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})(x + (-x) = 0)$

   Prvek $-x$ s touto vlastností nazýváme opačným prvkem k x.

Operace násobení na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ splňuje

5. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \cdot y = y \cdot x)$

   Říkáme, že násobení je komutativní.

6. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$

   Říkáme, že násobení je asociativní.

   Toto pravidlo nám umožňuje vynechat závorky a psát $x \cdot y \cdot z$.

7. $(\exists\, 1 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 1 = x)$

   Prvek 1 s touto vlastností nazýváme buď jedničkou, nebo jednotkovým prvkem, nebo též neutrálním prvkem násobení.

8. $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})(x \cdot x^{-1} = 1)$

   Prvek x^{-1} s touto vlastností nazýváme inverzním prvkem k x.

Operace násobení a sčítání na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ splňují

9. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$

   Toto pravidlo nazýváme distributivním zákonem.

   Budeme používat přednost násobení před sčítáním a pravou stranu budeme psát bez závorek.

Relace $<: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{\text{platí}, \text{neplatí}\}$ na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ splňuje

10. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí právě jeden z výroků $x < y$, $y < x$, $x = y$.

11. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$

    Toto pravidlo budeme používat pro úpravy nerovnic.

12. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x < y \wedge 0 < z) \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$

    Toto pravidlo budeme používat pro úpravy nerovnic.

17. Důsledky axiomů.

1. Všimněte si, že v axiomech není zmínka o odčítání čísel. Odčítání je zkrácený zápis pro přičtení opačného prvku

$$a - b := a + (-b)$$

2. Podobně není v axiomech zmínka o dělení. Dělení je zkrácený zápis pro násobení inverzním prvkem

$$a/b := a \cdot (b)^{-1}$$

3. **Úloha:** Z kterého axiomu a jak plyne, že nulou dělit nelze?

4. **Úloha:** Vysvětlene pojmy důsledková a ekvivalentní úprava rovnic a nerovnic.

5. Axiom 11 znamená, že přičtení z k oběma stranám nerovnice

$$x < y \tag{2}$$

je důsledková úprava. Výslednou nerovnici

$$x + z < y + z \tag{3}$$

můžeme převést zpět na (2) přičtením opačného čísla $-z$. Proto je přičtení čísla či výrazu k oběma stranám nerovnice ekvivalentní úprava.

6. Axiom 12 znamená, že násobení nerovnice

$$x < y \tag{4}$$

kladným číslem z je důsledková úprava. Nerovnici po této úpravě

$$xz < yz \tag{5}$$

můžeme na (4) převést vynásobením obou stran kladným z^{-1}, proto je násobení nerovnice kladným číslem ekvivalentní úprava.

18. Příklady.

1. Axiomy běžně používáme při úpravách výrazů, rovnic a nerovnic.

   Předvedeme použití axiomů na řešení lineární nerovnice:

   K rovnici (6) přičteme prvek opačný k 3.

   V rovnici (7) na levé straně použijeme asociativitu sčítání, vlastnost opačného prvku a vlastnost neutrálního prvku.

   Rovnici (8) vynásobíme prvkem inverzním k nenulovému prvku 2.

   V rovnici (9) na levé straně použijeme asociativitu násobení, vlastnost inverzního prvku a vlastnost neutrálního prvku.

$$2x + 3 < 0 \tag{6}$$
$$2x + 3 - 3 < 0 - 3 \tag{7}$$
$$2x < -3 \tag{8}$$
$$2x2^{-1} < -3 \cdot 2^{-1} \tag{9}$$
$$x < -3 \cdot 2^{-1} \tag{10}$$

Získali jsme ekvivalentními úpravami, že nerovnici (6) splňují x, která vyhouvjí nerovnici (10). To nás vede k definici intervalů v následujícím odstavci.

2* Ukažte, jak z axiomů plyne, že pro $z < 0$ je následující úprava ekvivalentní

$$\begin{array}{rcl} l & < & p \\ lz & > & pz \end{array}$$

Návod: ukažte, že $-z > 0$, $a(-z) = -(az)$.

19. Definice intervalů. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Definujeme intervaly

$$\begin{array}{rcl}
(a, +\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
[a, +\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty, a) & := & \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\
(-\infty, a] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
(a, b) & := & (a, +\infty) \cap (-\infty, b) \\
[a, b) & := & [a, +\infty) \cap (-\infty, b) \\
(a, b] & := & (a, +\infty) \cap (-\infty, b] \\
[a, b] & := & [a, +\infty) \cap (-\infty, b] \\
(-\infty, +\infty) & := & \mathbb{R}
\end{array}$$

20. Úlohy.

1. První řádek v definici 19 čteme: $(a, +\infty)$ je množina reálných čísel x, pro něž platí $x > a$.

   Přečtěte i další tři řádky.

2. Nechť je $I := (2, -1)$. Napište vlastnosti, které splňují $x \in I$ a určete, čemu je I rovno.

21. Úloha. Rozmyslete si, které z axiomů 1 až 12 splňují operace $+$, $\cdot$ a relace $<$ na množině celých čísel a které na množině racionálních čísel.

22. Pozorování. V úloze 21 jste zjistili, že množina racionálních čísel splňuje všech dvanáct axiomů.

Cílem následujících odstavců je zformulovat axiom, který odlišuje množiny reálných a racionálních čísel.

23. Definice shora omezené množiny, horní hranice množiny. Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je shora omezená, pokud existuje $H \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in M : H \geq x$$

Číslo H nazýváme horní hranicí případně horní závorou množiny M.

24. Definice suprema množiny. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že číslo S je supremem množiny M, pokud platí (i), (ii).

(i) $(\forall x \in M)(x \leq S)$

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(S - \varepsilon < x)$

Supremum množiny M značíme $\sup(M)$.

25. Poznámka. Vlastnost (i) znamená, že číslo S je horní hranicí množiny M.

Vlastnost (ii) znamená, že číslo $S' := S - \varepsilon$ menší než S není horní hranicí množiny M.

Číslo S splňující (i), (ii) je tedy nejmenší horní hranicí množiny M.

26. Axiom suprema.

13. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ je shora omezená množina.

    Pak existuje $\sup(M) \in \mathbb{R}$.

27. Definice reálných čísel. Reálná čísla definujeme jako trojici $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, kde $\mathbb{R}$ je množina, $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jsou zobrazení, $<: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{\text{platí}, \text{neplatí}\}$ je relace, splňující axiomy 1 – 13.

28. Důležité důsledky axiomu suprema.

1. Existence limity omezené monotonní posloupnosti.
2. Existence jednostranné limity omezené monotonní funkce.
3. Věta o kořenu spojité funkce.
4. Vlastnost nabývání mezihodnot spojité funkce.
5. Konvergence Cauchyovské posloupnosti reálných čísel.

29. Příklady.

1. Posloupnost $a_1 = 1.4$, $a_2 = 1.41$, $a_3 = 1.414$, $a_4 = 1.4142$ ukončených desetinných rozvojů čísla $\sqrt{2}$ je konvergentní v oboru reálných čísel. Odtud plyne, že je Cauchyovská a to jak v oboru reálných, tak v oboru racionálních čísel.

   Protože její limita není racionální číslo, není tato posloupnost konvergentní v oboru racionálních čísel.

2. Další posloupnost, která je konvergentní v oboru reálných čísel a nikoliv v oboru racionálních čísel je $\{(1 + 1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Její prvky jsou racionální čísla a limita je rovna Eulerovu číslu $e \doteq 2.71$, které není racionální.

3. Rovnice $x^2 = 2$ má řešení v oboru reálných čísel a nemá řešení v oboru racionálních čísel.

30. Úlohy.

1. Ukažte, že posloupnosti $\{(1+1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(1-1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou rostoucí.

   Návod: Použijte AG nerovnost na čísla

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 \pm 1/n, a_{n+1} = 1$$

2. Ukažte, že posloupnost $\{(1+1/n)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající.

   Návod: Upravte

$$\frac{1}{(1-1/n)^n}$$

   a použijte výsledek předchozí úlohy.

3. Ukažte, že posloupnost $\{(1+1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$, je omezená.

   Návod: použijte výsledek předchozí úlohy.