1. týden (10. – 16. února): Přečtěte 1 – 8, k příkladům ve 2, 4, 6, 8 přidejte další a tyto vaše příklady vložte na sdílený disk. Termín: pondělí ve druhém týdnu (17. února). Ve třetím týdnu vybraný student tuto část předvede ostatním na cvičení (prezenčního studia).

Úkoly pro první část jsou výše podrobně rozepsané. Požadavek vložení příkladů/výpočtů do následujícího pondělí platí i pro další části. Stejně tak i předvedení na cvičení.

2. týden: Přečtěte 9 – 16, vysvětlete pozorování v 11, k příkladům v 13 přidejte další, proveďte výpočty v úloze 14 a vyřešte úlohy v 16.

3. týden: Přečtěte 17 – 24, vyřešte úlohu 17, proveďte výpočty v příkladech 18, 21 a 24.

4. týden: Přečtěte 25 – 32, vyřešte úlohy v 27 (hvězdičkovou úlohu volitelně) a ukažte, že implikace (6), (7) mají stejnou pravdivostní hodnotu.

5. týden: Přečtěte 33 – 36 a vyřešte úlohy v 35.

Polynomy

11. února 2025

Cíl: Zopakovat a doplpnit znalosti polynomů a racionálních funkcí.

Metacíl: Zlepšit se ve čtení matematického textu. Zvýšit houževnatost při dosahování svých cílů. Směřovat k modelu převrácené třídy.

1. Značení. Funkci f s definičním oborem D_f a oborem hodnot $H_f \subseteq \mathbb{R}$ budeme značit

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$

případně

$$f : D_f \to_{na} H_f$$

a říkáme, že funkce f zobrazuje množinu D_f na množinu H_f.

Funkční hodnotu v bodě x značíme $f(x)$ a píšeme

$$f : x \mapsto f(x)$$

Pokud chceme uvést i definiční obor D_f, píšeme

$$f : x \mapsto f(x), \quad x \in D_f$$

Pokud u funkce zadané funkčním předpisem neuvedeme definiční obor, máme na mysli tzv. přirozený definiční obor zahrnující čísla, pro které má předpis funkce smysl.

2. Příklady.

1. Příklady funkcí $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ jsou:
   (a) $f(x) = \log(x)$
   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x > 0$
2. Příklady funkcí $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ jsou:
   (a) $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2 & x \in [1, 4] \end{cases}$
   (b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

3. Definice rovnosti funkcí. Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Řekneme, že se funkce f, g rovnají a píšeme $f = g$, pokud platí

(i) $D_f = D_g$

(ii) $(\forall x \in D_f)(f(x) = g(x))$

4. Příklady.

1. Funkce $f(x) = 2\log(x^2)$, $g(x) = \log(x^4)$ se rovnají.

2. Funkce $f(x) = 2\log(x)$, $g(x) = \log(x^2)$ se nerovnají, protože mají různé definiční obory.

3. Funkce $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ se nerovnají. Nemají stejné funkční hodnoty pro $x < 0$.

4. Funkce $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$, $g(x) = 4x$ se rovnají.

5. Funkce $f(x) = \sin(x+1) + \sin(x-1)$, $g(x) = 2\sin(x)\cos(1)$ se rovnají.

5. Definice kořenu funkce. Nechť $D \subseteq \mathbb{R}$ je množina, $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce. Číslo $x \in D$ nazveme kořenem funkce f, pokud platí $f(x) = 0$.

6. Příklady.

1. Číslo $x = 2$ je kořenem funkcí $f(x) = \log(x-1)$, $g(x) = 4 - x^2$.

2. Číslo $x = 1/(5\pi)$ je kořenem funkce $f(x) = x\sin(1/x)$, číslo $x = 0$ není kořenem této funkce.

3. V příkladu 2(a) odstavce 2 jsou čísla $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$ kořeny funkce f, zatímco čísla $x_3 = 1$, $x_4 = -\sqrt{2}$ jejími kořeny nejsou.

7. Definice aritmetických operací s funkcemi. Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$.

Definujeme součet $f+g$, součin fg a podíl f/g funkcí f, g a násobek cf funkce f

$$\begin{aligned}
f+g : x &\mapsto f(x)+g(x), \quad x \in D_f \cap D_g \\
cf : x &\mapsto cf(x), \quad x \in D_f \\
fg : x &\mapsto f(x)g(x), \quad x \in D_f \cap D_g \\
f/g : x &\mapsto f(x)/g(x), \quad x \in \{t \in D_f \cap D_g : g(t) \neq 0\}
\end{aligned}$$

Rozdíl funkcí f, g definujeme pomocí součtu a násobku

$$f - g = f + (-1)g$$

8. Příklady. Nechť $f(x) = x+1$, $g(x) = 1-x$.

Pak $fg : x \mapsto 1 - x^2$, $f + 3g : x \mapsto -2x + 4$, $f - 2g : x \mapsto 3x - 1$.

Někdy používáme poněkud těžkopádný zápis
$(fg)(x) = 1 - x^2$,
$(f+3g)(x) = -2x + 4$,
$(f-2g)(x) = 3x - 1$.

9. Definice polynomu. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Výraz P v (1) nazýváme polynomem stupně n, píšeme $st(P) = n$, čísla a_n nazýváme koeficienty polynomu, výrazy $a_k x^k$ nazýváme členy polynomu.

$$P = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{1}$$

Výraz $P = 0$ nazýváme nulovým polynomem. Stupeň nulového polynomu nedefinujeme.[1]

Funkci $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která číslu x přiřadí hodnotu výrazu P nazýváme též polynomem. Funkční hodnotu v tomto případě značíme $P(x)$. (Terminologie je tedy v tomto případě nejednoznačná. Zpravidla bude dáno kontextem, zda máme na mysli výraz nebo funkci, v opačném případě to uvedeme.)

10. Definice rovnosti polynomů. Nechť P, Q jsou polynomy a máme na mysli výrazy, nikoliv funkce.

$$\begin{aligned} P &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m = \sum_{k=0}^{m} p_k x^k \\ Q &= q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k \end{aligned}$$

Řekneme, že polynomy P, Q se rovnají a píšeme $P = Q$, pokud platí

(i) Rovnají se jejich stupně: $st(P) = st(Q)$.

(ii) Rovnají se koeficienty u stejných mocnin. Tedy pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq st(P)$ platí $p_k = q_k$.

11. Pozorování o rovnosti polynomů a nulovém polynomu. Nechť P, Q jsou polynomy. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní.

(i) $P = Q$ ve smyslu rovnosti výrazů

(ii) Rozdíl $P - Q$ je nulový polynom.

12. Rovnost výrazů a rovnost funkcí. Rozmyslete si, že z rovnosti polynomů $P = Q$ plyne rovnost funkcí $P : x \mapsto P(x)$, $Q : x \mapsto Q(x)$.

Níže v textu, v odstavci 33, ukážeme, že platí i opačná implikace. Tedy, že z rovnosti funkcí plyne rovnost výrazů. Příklady v odstavci 4 ukazují, že jiné funkce se mohou rovnat, přestože jejich výrazy nejsou totožné.

13. Příklady.

[1] V některých kontextech se hodí definovat stupeň nulového polynomu rovný -1. My to dělat nebudeme.

1. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $P = x^2 + 2$, $Q = x^2 + ax + 2$, $R = x^2 + ax + 3$. Pak se polynomy P, Q rovnají pro $a = 0$ a pro $a \neq 0$ se nerovnají. Polynomy P, R se nerovnají pro žádnou hodnotu a.

2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $P = ax + b$, $Q = 3$. Pak se $P = Q$, právě když je $a = 0$, $b = 3$.

14. Úloha. Vynásobte a sečtěte polynomy $P = 2x^2 - 3x + 1$, $Q = x + 3$ způsobem, který znáte ze střední školy.

Zamyslete se, jak byste definovali součet a součin polynomů. Níže je, možná se vám bude zdát, že komplikovaně, napsaná definice těchto operací. Zamyslete se nad významem komplikací a případně navrhněte zjednodušení formulace.

15. Definice aritmetických operací s polynomy. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$. Nechť P, Q jsou polynomy

$$P = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m = \sum_{k=0}^{m} p_k x^k \tag{2}$$

$$Q = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k \tag{3}$$

Definujeme součty $P + Q$, $Q + P$, součin PQ a násobek cP

$$\begin{aligned} P + Q = Q + P &= \sum_{k=0}^{m} (p_k + q_k) x^k + \sum_{k=m+1}^{n} q_k x^k \\ PQ &= \sum_{k=0}^{nm} \left(\sum_{l=0}^{k} p_l q_{k-l} \right) x^k \\ cP &= cp_0 + cp_1 x + \cdots + cp_m x^m = \sum_{k=0}^{m} cp_k x^k \end{aligned}$$

Rozdíl polynomů P, Q definujeme pomocí součtu a násobku

$$P - Q = P + (-1)Q$$

16. Úlohy.

1. Ukažte, že při násobení nenulových polynomů se jejich stupně sčítají, formálně zapsáno $st(PQ) = st(P) + st(Q)$.

2. Nalezněte polynomy P, Q takové, že

   (a) $st(P + Q) = st(P)$

   (b) $st(P + Q) = st(Q)$

(c) Neplatí ani (a), ani (b).

Jaký nejmenší a největší stupeň má polynom $P+Q$? Vyjádřete pomocí stupňů polynomů P, Q.

17. Úloha. V předchozí definici jsme vynechali dělení, protože výsledkem dělení polynomů nemusí být polynom.

V následujícím příkladu 18 ukazujeme, jak dělení polynomu se zbytkem vyjádříme pomocí násobení polynomů. Je to podobné jako s dělením celých čísel: Zvolte dvě čísla $a, b \in \mathbb{N}^+$, $a > b > 1$, vydělte a/b, celočíselný výsledek ozvačte p a zbytek označte z. Ukažte, že platí

$$a = bp + z \tag{4}$$

Volbu a, b a výpočet opakujte, dokud vám nebude jasné, proč rovnost (4) platí vždy.

18. Příklad. $P = x^5 - x^3 + 3x - 2$ je polynom pátého stupně, $Q = x^2 - x - 3$ je polynom třetího stupně.

Vydělte polynomy P, Q

$$(x^5 - x^3 + 3x - 2) : (x^2 - x - 3)$$

Výsledek dělení označte R, zbytek označte S a ukažte, že platí

$$P = RQ + S$$

19. Věta o dělení polynomu polynomem se zbytkem. Nechť P, Q jsou polynomy stupně $n_P, n_Q \in \mathbb{N}_0$, $n_Q \leq n_P$.

Pak existuje polynom R stupně $n_R = n_P - n_Q$ a polynom S, který má stupeň $n_S < n_Q$ nebo je nulovým polynomem[2] takové, že pro polynomy P, Q, R, S platí rovnost

$$P = QR + S$$

20. Důkaz vynecháme. Dá se provést výpočtem koeficientů polynomů R, S tak aby se polynomy P, $QR+S$ rovnaly (máme na mysli rovnost výrazů, tedy rovnost koeficientů u odpovídajících mocnin). Více v následujících příkladech.

21. Příklady.

[2] Zde by se hodilo definovat stupeň nulového polynomu jako -1. Formulace věty by pak byla kratší.

1. Nechť $P = 5x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 1$, $Q = x^2 + 2$.

   Napište polynomy R, S stupňů n, m dle věty o dělení polynomu polynomem ve tvaru

   $$\begin{aligned} R &= r_0 + r_1 x + \cdots + r_n x^n \\ S &= s_0 + s_1 x + \cdots + s_m x^m \end{aligned}$$

   a napište rovnost polynomů (ve smyslu rovnosti výrazů) $P = QR + S$ ve tvaru soustavy rovnic pro koeficienty polynomů R, S.

   Ukažte, že tato soustava má jednoznačné řešení aniž byste ji vyřešili.

2. Vyřešte předchozí úlohu pro obecně zadané $P = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_4 \neq 0$. $Q = x^2 + 2$ zvolte stejné.

3. Vyřešte předchozí úlohu (tj. úlohu 2) pro obecně zadané $Q = b_2x^2 + b_1x + b_0$, $b_2 \neq 0$. P zvolte stejné.

22. Věta o dělení polynomu kořenovým činitelem. Nechť P je polynom, x_0 je jeho kořen.

Pak existuje polynom R stupně $st(R) = st(P) - 1$ takový, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = (x - x_0)R(x)$$

23. Důkaz. $Q(x) = x - x_0$ je polynom prvního stupně. Proto dle věty o dělení polynomu polynomem existuje polynom R stupně $st(R) = st(P) - 1$ a číslo a takové, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = (x - x_0)R(x) + a$$

Dosazením $x = x_0$ dostaneme $P(x_0) = (x_0 - x_0)R(x_0) + a$. Protože je x_0 kořen polynomu P, platí $P(x_0) = 0$, tedy $a = 0$, a tedy

$$P(x) = (x - x_0)R(x)$$

24. Příklad. Ukažte, že $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ jsou kořeny polynomu $P = 4x^5 - 12x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 2x$. Pomocí postupného dělení kořenovým činitelem vypočtěte další kořeny polynomu P.

25. Věta o počtu kořenů polynomu. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, polynom P je zadaný vztahem

$$P(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Pak má P nejvýše n různých reálných kořenů.

26. Důkaz provedeme matematickou indukcí.

1. Nechť $n = 1$. Předpokládáme $a_1 \neq 0$, proto má polynom $P(x) = a_1x + a_0$ právě jeden kořen (podrobnosti necháme na čtenáři).

2. Nechť $N \in \mathbb{N}^+$ a předpokládejme, že polynomy stupně $n \leq N$ mají nejvýše n kořenů.

   Nechť je P polynom stupně $N+1$. Pokud nemá žádný reálný kořen, je tvrzení věty pro P dokázané.

   Nechť má P alespoň jeden reálný kořen, označme ho x_0. Z věty o dělení polynomu kořenovým činitelem plyne existence polynomu R stupně N takového, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

   $$P(x) = R(x)(x - x_0) \tag{5}$$

   Z indukčního předpokladu plyne, že polynom R má nejvýše N kořenů. Z (5) pak plyne, že P má nejvýše $N+1$ kořenů.

Dokázali jsme tvrzení věty pro polynomy stupně jedna i indukční krok, proto tvrzení platí pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$.

27. Úlohy. *[3]Ukažte, že polynom třetího stupně má vždy alespoň jeden reálný kořen. Dále uveďte příklady polynomů P, Q, R třetího stupně takových, že

1. P má tři různé reálné kořeny,

2. Q má právě dva různé reálné kořeny,

3. R má právě jeden reálný kořen.

28. Lemma o nenulovém polynomu. Nechť P je polynom stupně $n \in \mathbb{N}_0$. Pak má P konečně mnoho navzájem různých kořenů.

29. Důkaz je jednoduchým důsledkem věty o počtu kořenů polynomu. Podrobnosti necháme na čtenáři.

30. Lemma o nulovém polynomu. Nechť P je polynom, který má nekonečně mnoho navzájem různých kořenů.

Pak je P nulový polynom.

31. Poznámka o nepřímém důkazu a obměněné implikaci. Nechť A, B jsou výroky. Rozmyslete si, že výrok

$$A \Rightarrow B \tag{6}$$

je ekvivalentní s výrokem

$$\neg B \Rightarrow \neg A \tag{7}$$

[3]Hvězdička značí, že úloha jde za rámec textu. Potřebujete buď pokročilejší vlastnosti komplexních čísel nebo vlastnosti spojitých funkcí.

Implikaci (7) nazýváme obměněnou implikací implikace (6).

Při důkazu tvrzení formulovaného jako imlikace (6) můžeme dokazovat buď implikaci (6) a takový důkaz nazýváme *přímým důkazem*, nebo dokazujeme implikaci (7) a takový důkaz nazýváme *nepřímým důkazem*.

32. Důkaz lemmatu o nulovém polynomu provedeme nepřímo. Tvrzení zapíšeme pomocí implikace (6), kde

Výrok A : Polynom P má nekonečně mnoho navzájem různých kořenů.
Výrok B : P je nulový polynom.

Pravdivost obměněné implikace (7) plyne z lemmatu 28 o nenulovém polynomu.

33. Lemma o rovnosti polynomů. Nechť P, Q jsou polynomy stupňů n, m

$$P = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n \tag{8}$$
$$Q = q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m \tag{9}$$

Nechť se rovnají funkce $P : x \mapsto P(x)$, $Q : x \mapsto Q(x)$.

Pak se rovnají polynomy jako výrazy, tj platí $n = m$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ platí $p_k = q_k$.

34. Důkaz. Rozdíl polynomů $R = P - Q$ je polynom. Pokud se polynomy P, Q rovnají ve smyslu rovnosti funkcí, jsou všechna $x \in \mathbb{R}$ kořeny polynomu R. Proto má polynom R nekonečně mnoho kořenů a odtud a z lemmatu o nulovém polynomu plyne, že R je nulový polynom.

Tvrzení věty pak plyne z pozorování v 11.

35. Úlohy.

1. Nalezněte $A, B, C \in \mathbb{R}$ pro která se rovnají funkce $f = g$. Svůj postup zdůvodněte.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 13x + 5 \\ g(x) &= (A + B)x^2 + (-2A - 3B + C)x + 2A - 3C \end{aligned}$$

2. Nalezněte $A, B, C \in \mathbb{R}$ pro která se rovnají funkce $f = g$. Svůj postup zdůvodněte.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5x^2 - 13x + 5}{(x-3)(x^2 - 2x + 2)} \\ g(x) &= \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

36. Poznámka. Zlomky v definici funkce g v úloze 35.2 nazýváme parciálními zlomky.