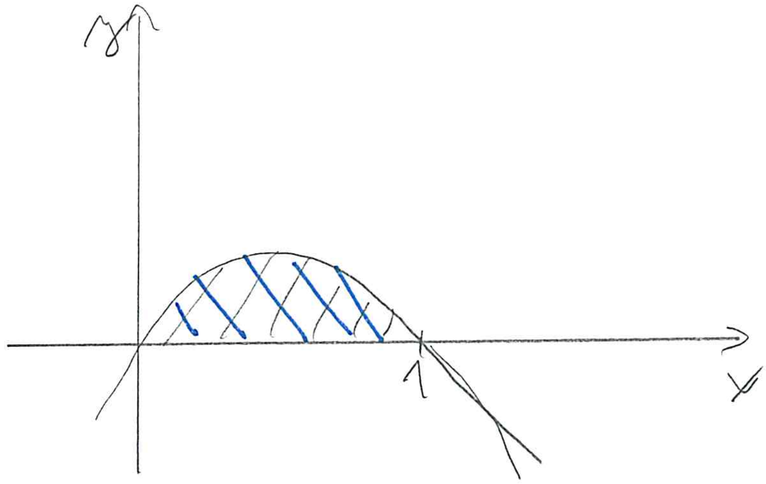
Riemannův integrál

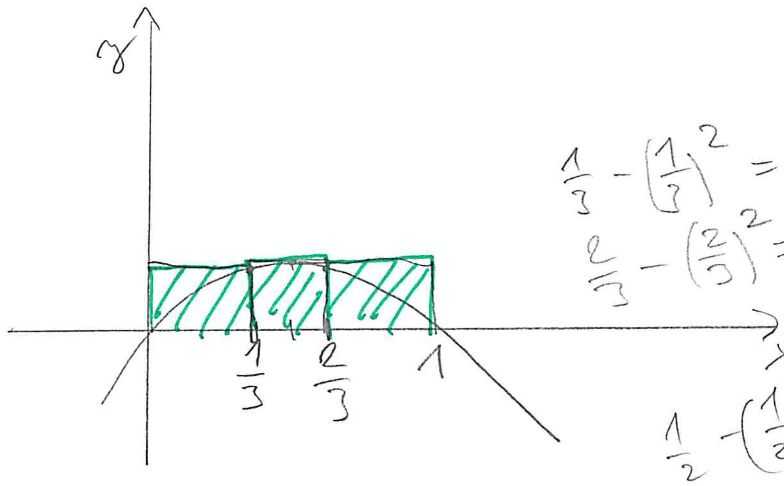
Motivace

Chceme vypočíst, nebo alespoň odhadnout, obsah množiny

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq x - x^2\}$$



$$\frac{2}{27} \leq S \leq S = \frac{25}{104}$$

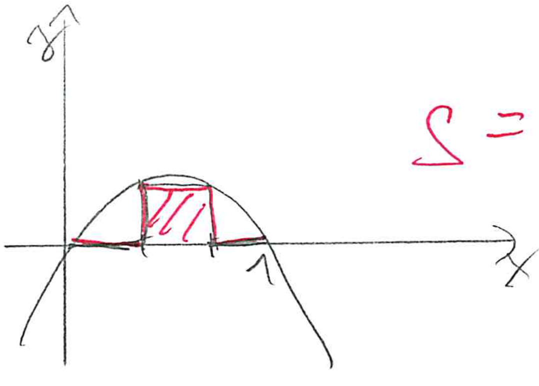


$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{25}{104} \doteq 0.24$$



$$S = 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} + 0 = \frac{2}{27} \doteq$$

0.074

Při výpočtu jsme použili vlastnosti obsahu

(i) Obsah obdélníku O o stranách a, b je roven $S(O) = ab$.

(ii) Mají-li množiny M_1, M_2 prázdný průnik, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak je obsah jejich sjednocení roven součtu jejich obsahů

$$S(M_1 \cup M_2) = S(M_1) + S(M_2) \tag{1}$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivita obsahu.*

Vztah (1) platí i v případě, že je průnik množin neprázdný, ale má nulový obsah. Například, když mají dva obdélníky společnou stranu. V obecném případě platí

$$S(M_1 \cup M_2) = S(M_1) + S(M_2) - S(M_1 \cap M_2)$$

(iii) Je-li $M_1 \subset M_2$, pak je $S(M_1) \leq S(M_2)$.

Tuto vlastnost nazýváme *monotonie obsahu.*

Při definici Riemannova integrálu budeme potřebovat pojmy horní a dolní hranice množiny a supremum a infimum množiny. Připomeneme definice těchto pojmů a vztahy mezi nimi.

Definice 1 (horní a dolní hranice množiny). Číslo $H \in \mathbb{R}$ nazveme *horní hranicí množiny* M, pokud platí

$$\forall x \in M : x \leq H$$

Číslo $D \in \mathbb{R}$ nazveme *dolní hranicí množiny* M, pokud platí

$$\forall x \in M : x \geq D$$

Definice 2 (supremum a infimum množiny). Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je množina.

Číslo $S \in \mathbb{R}$ splňující (i), (ii) nazveme *supremem množiny* M a budeme značit $S = \sup(M)$.

(i) $\forall x \in M : x \leq S$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in M : x > S - \varepsilon$

Číslo $s \in \mathbb{R}$ splňující (iii), (iv) nazveme *infimem množiny* M a budeme značit $s = \inf(M)$.

(iii) $\forall x \in M : x \geq s$

(iv) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in M : x < s + \varepsilon$

Z vlastnosti (i) plyne, že supremum množiny je horní hranicí množiny. Následující lemma ukazuje, že supremum množiny je nejmenší horní hranicí množiny.

Lemma 3 (o supremu a horní hranici množiny). Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ množina a číslo H je horní hranice množiny M.

Pak platí $H \geq \sup(M)$.

Důkaz provedeme nepřímo. Dokážeme implikaci: je-li $H < \sup(M)$, pak H není horní hranicí množiny M.

Zvolme $\varepsilon = \sup(M) - H$. Pak z $H < \sup(M)$ plyne $\varepsilon > 0$.

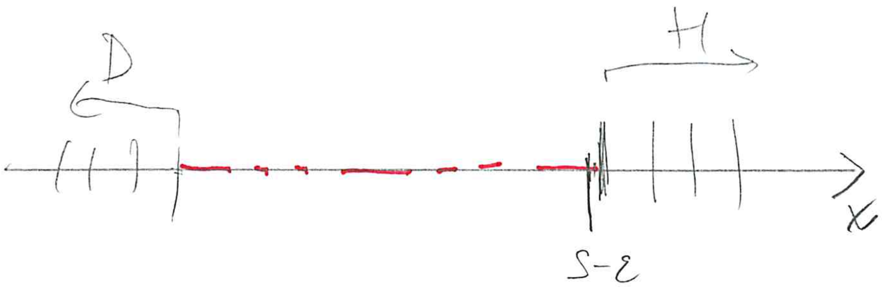
Z (ii) pak plyne existence $x \in M$ takového, že platí $x > \sup(M) - \varepsilon$.

Dosazením $\varepsilon = \sup(M) - H$ dostaneme $x > \sup(M) - (\sup(M) - H)$ a po úpravě dostaneme $x > H$. Odtud plyne, že H není horní hranice množiny M. $\square$

Jako cvičení dokažte analogické tvrzení pro infimum a dolní hranici.

Lemma 4 (o infimu a dolní hranici množiny). Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ množina a číslo D je horní hranicí množiny M.

Pak platí $D \leq \inf(M)$.



(i) не $s-\varepsilon$:

$\forall x \in M: \ x \le s-\varepsilon$

неверно

$\exists x \in M: \ x > s-\varepsilon$

Definice 5 (Riemannův integrál, riemannovská integrovatelnost funkce).

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce omezená na intervalu I.

Posloupnost čísel x_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ splňující $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i < x_{i+1}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ nazveme *dělením intervalu I*. Dělení označíme $D = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Číslo

$$HIS(f, D) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup \boxed{\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}}$$ Mo

nazveme *horním integrálním součtem funkce f pro dělení D*.

Číslo

Mi

$$DIS(f, D) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf \{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

nazveme *dolním integrálním součtem funkce f pro dělení D*.

Dolním Riemannovým integrálem funkce f přes interval I nazveme číslo

$$(R) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x := \sup\{DIS(f, D) : D \text{ je dělení intervalu } I\}$$

Horním Riemannovým integrálem funkce f přes interval I nazveme číslo

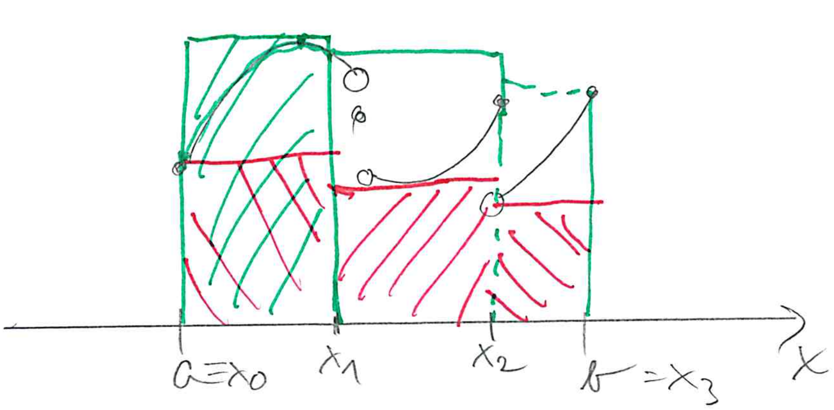
$$(R) \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\, \mathrm{d}x := \inf\{HIS(f, D) : D \text{ je dělení intervalu } I\}$$

Funkci f nazveme *riemannovsky integrovatelnou na intervalu I*, pokud se její dolní a horní Riemannovy integrály rovnají, tedy pokud

$$(R) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x = (R) \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\, \mathrm{d}x \tag{2}$$

Společnou hodnotu v (2) pak nazýváme *Riemannovým integrálem funkce f na intervalu I* a značíme

$$(R) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$



$I = [a, b]$

$HIS(f, D) = (x_1 - x_0) \cdot \min M_0$

$\sup M_0$

$M_1 = \{f(x) : x \in [x_1, x_0]\}$

Příklad 6. $I = [0,1]$, $f(x) = x$, $x_i = \frac{i}{5}$ pro $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Spočítáme DIS, HIS.

Příklad 7. $I = [0,1]$, $f(x) = x$, $x_i = \frac{i}{n}$ pro $i \in \{0,1,\dots,n\}$. Spočítáme DIS, HIS.

Příklad 8. $I = [0,1]$, f je Dirichletova funkce

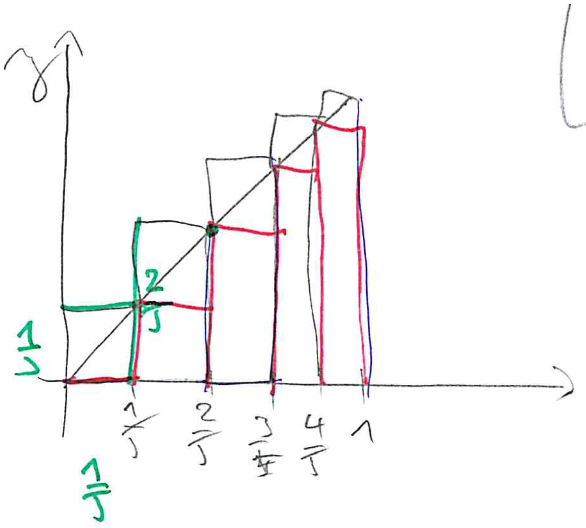
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

D je dělení intervalu I. Spočítáme DIS, HIS i dolní a horní Riemannův integrál a ukážeme, že funkce není riemannovsky integrovatelná na intervalu I.

Příklad 9. $I = [a,b]$, f je konstantní funkce $f(x) = k$, D je dělení intervalu I. Spočítáme DIS, HIS i dolní a horní Riemannův integrál a ukážeme, že funkce je riemannovsky integrovatelná na intervalu I a platí

$$(R)\int_a^b k \,\mathrm{d}x = k(b-a) \tag{3}$$

Príklad 6



~~DIS =~~

$$HIS = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{25}(1+2+3+4+5) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$DIS = 0 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} =$$

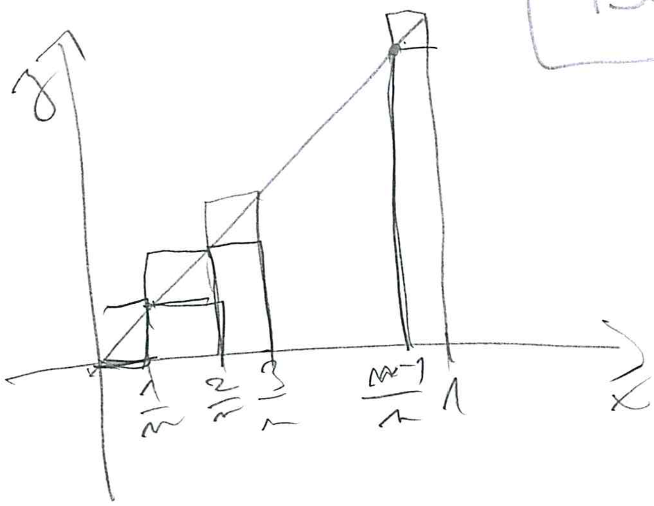
$$= \frac{1}{25}(0 + 1+2+3+4) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$= 0.4$$

$$0.4 \leq \int_0^1 x\,dx \leq 0.6$$

pokiaľ je $f(x)=x$ Riemannovsky integrovateľná na $[0,1]$

Príklad 7



$$HIS = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n} + \dots \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1 + 2 + 3 + \dots + n\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{n^2}}\,\frac{(n+1)\cancel{n}}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$DIS = 0 + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \dots + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} =$$

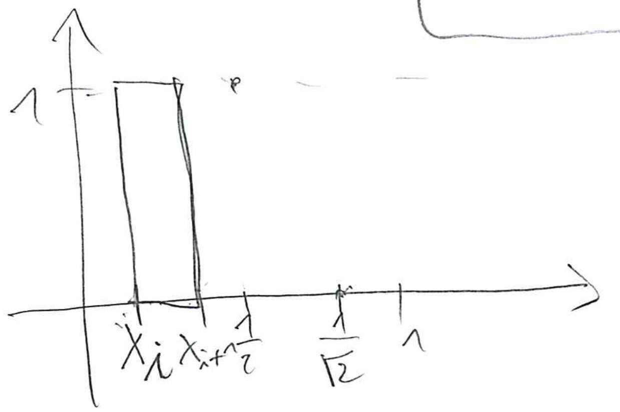
$$= \frac{1}{n^2}\left(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Záver: Pokiaľ je f riemannovsky integrovateľná na $I = \langle 0, 1\rangle$, tak je

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \le (R)\int_0^1 x\,dx \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Příklad 8



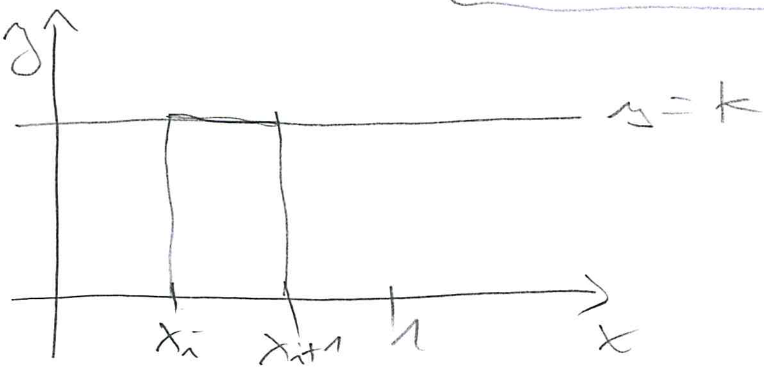
$$M_i = \{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} =$$
$$= \{0; 1\}$$
$$\inf M_i = 0$$
$$\sup M_i = 1$$

$$DIS = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf M_i = 0$$

$$HIS = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup M_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) =$$
$$= x_n - \cancel{x_{n-1}} + \cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}} + \dots$$
$$+ \cancel{x_1} - x_0 = x_n - x_0 = b - a =$$
$$= 1 - 0 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} (R)\int_a^b f(x)\,dx = \cancel{\inf} \sup \{DIS\} = \sup\{0\} = 0 \\ (R)\overline{\int_a^b} = \inf \{HIS\} = \inf\{1\} = 1 \end{array}\right\} \neq$$

Primer 9



$$M_i = \{ f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}] \} = \{k\}$$

$$\sup M_i = k$$

$$\inf M_i = k$$

$$DIS = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot k = k \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = k(b-a)$$

$$HIS = \text{— '' —}$$

$$\underline{(R)\int_a^b} f(x)\,dx = k(b-a)$$

$$\overline{(R)\int_a^b} f(x)\,dx = k(b-a)$$

Lemma 10. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je riemannovsky integrovatelná funkce na intervalu I.

Nechť $c \in I$, $C \in \mathbb{R}$, g je funkce definovaná vztahem

$$g(x) = \begin{cases} C & x = c \\ f(x) & x \in I \setminus \{c\} \end{cases}$$

Pak je g také riemannovsky integrovatelná na I

a platí $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^b g(x)\,dx$

Hlavní myšlenka důkazu. Nechť je $\delta > 0$, $\delta < b - a$. Zvolíme dělení D obsahující interval $I_i := [x_i, x_{i+1}] \ni c$ délky $x_{i+1} - x_i = \delta$.

Pak je

$$|HIS(f, D) - HIS(g, D)| \leq \delta |f(c) - g(c)|$$

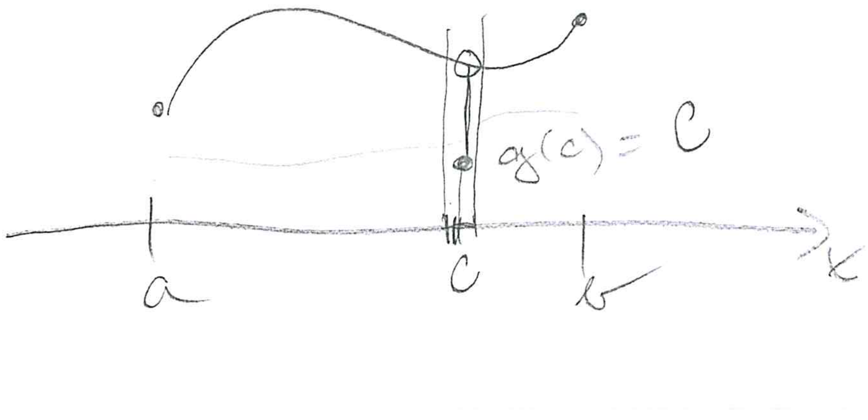
Odtud plyne

$$(R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Podobně pro DIS a dolní Riemannův integrál. □

Poznámka 11. Riemannův integrál jsme definovali na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Z lemma 10 plyne, že změnou funkční hodnoty integrované funkce f v jednom bodě se nezmění hodnota integrálu a nezmění se ani to, zda je funkce f riemannovsky integrovatelná.

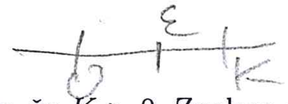
Proto nevadí, když funkce v jednom, nebo i ve více, ale konečně mnoha bodech, není definovaná. Z toho důvodu můžeme mluvit o riemannovské integrovatelnosti a Riemannově integrálu funkce na otevřeném omezeném intervalu $I = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.



Níže v lemma 13 dokážeme postačující podmínku riemannovské integrovatelnosti funkce. V závěru důkazu budeme potřebovat lemma 12, které nyní dokážeme.

Lemma 12 (o limitním přechodu). Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K \geq 0$ a nechť platí $\forall \varepsilon > 0 : K < \varepsilon$.

Pak je $K = 0$.



Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že $K > 0$. Zvolme $\varepsilon = K/2$. Pak je $\varepsilon > 0$ a $K > \varepsilon$. To je spor s předpokladem $K < \varepsilon$. □

Lemma 13 (o riemannovské integrovatelnosti).
Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce omezená na I.
Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu I takové, že platí

$$HIS(f, D) - DIS(f, D) < \varepsilon$$

Pak je funkce f riemannovsky integrovatelná na intervalu I.

Důkaz.

riemannovská integrovatelnost:

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{DIS(f,D) : D\}$$

$$\boxed{(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq DIS \qquad -\int \ldots \leq -DIS} \quad / \cdot (-1)$$

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{HIS(f,D) : D\}$$

$$\boxed{(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq HIS}$$

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq HIS - DIS < \varepsilon$$