Vlastnosti Riemannova integrálu

Derivace integrálu podle horní meze

Věta 19 (o vlastnostech Riemannova integrálu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$. Nechť jsou funkce f, g definované na I.

Pak platí

(i) Nechť $c \in (a, b)$. Pak je f riemannovsky integrovatelná na I právě když je riemannovsky integrovatelná na obou intervalech $[a, c]$, $[c, b]$ a platí

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivitou vzhledem k integračnímu oboru.*

(ii) Nechť jsou f, g riemannovsky integrovatelné na I. Nechť platí

$$\forall x \in I : f(x) \leq g(x).$$

Pak platí

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (R)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

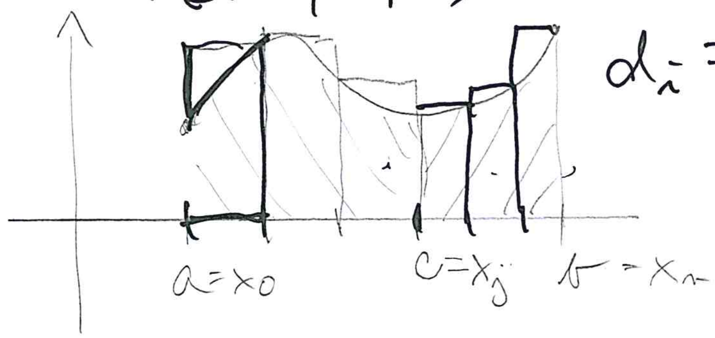
Tuto vlastnost nazýváme *monotonií vzhledem k integrované funkci.*

Hlavní myšlenky důkazu.

(i)

$x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\quad M_i := \{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$

$d_i = x_{i+1} - x_i$



$$HIS(f, D=(x_0, \dots x_j)) + HIS(f, D=(x_j, \dots x_n))$$

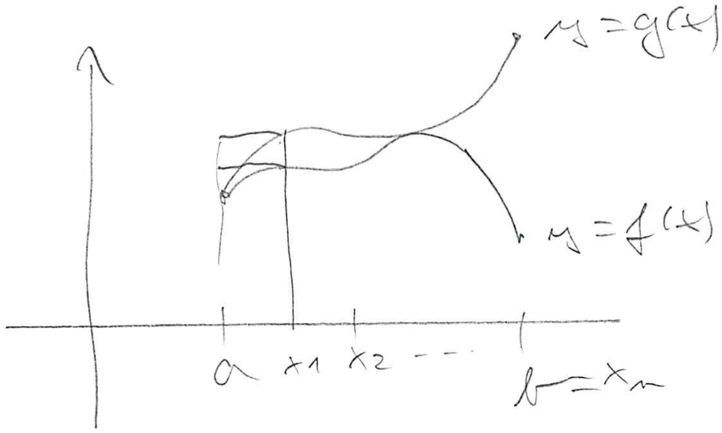
$$\sum_{i=0}^{j-1} d_i \inf(M_i) + \sum_{i=j}^{n-1} d_i \inf(M_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} d_i \inf(M_i) = H\underline{IS}(f, D=(x_0, \dots x_n))$$

$$= (R)\int_a^b f(x)\,dx$$

. . . . .

(iii)



$$HIS(f,D) \leq HIS(g,D)$$

$$\underbrace{(R)\overline{\int_a^b} g(x)\,dx}_{=:L} = \sup\{HIS(g,D) : D\}$$

L je horní hranice $\{HIS(f,D) : D\}$

$$\Downarrow$$

$$L \geq \sup\{HIS(f,D) : D\}$$

$$(R)\overline{\int_a^b} g(x)\,dx \geq (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad (*)$$

Protože je f, g riemannovsky integrovatelní na I, tak z (*) plyne

$$(R)\int_a^b g(x)\,dx \geq (R)\int_a^b f(x)\,dx$$

Věta 20 důležitá (o derivaci integrálu podle horní meze). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I.

Definujme pro $t \in (a, b]$

$$R(t) := (R) \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nechť $t \in (a, b)$ a funkce f je spojitá v bodě t.

Pak je funkce R diferencovatelná v bodě t a platí $R'(t) = f(t)$.

Hlavní myšlenka důkazu. Nechť $h > 0$, $t + h \in (a, b)$. Z aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru plyne

$$R(t+h) = R(t) + (R) \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Odtud plyne

$$R(t+h) - R(t) = (R) \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Protože je funkce f spojitá v bodě t, je pro malé h přibližně

$$(R) \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x \doteq h f(t)$$

Odtud dostaneme

$$\frac{R(t+h) - R(t)}{h} \doteq f(t) \tag{15}$$

Podobně pro $h < 0$, $t + h \in (a, b)$ dostaneme

$$R(t) = R(t+h) + (R) \int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Odtud

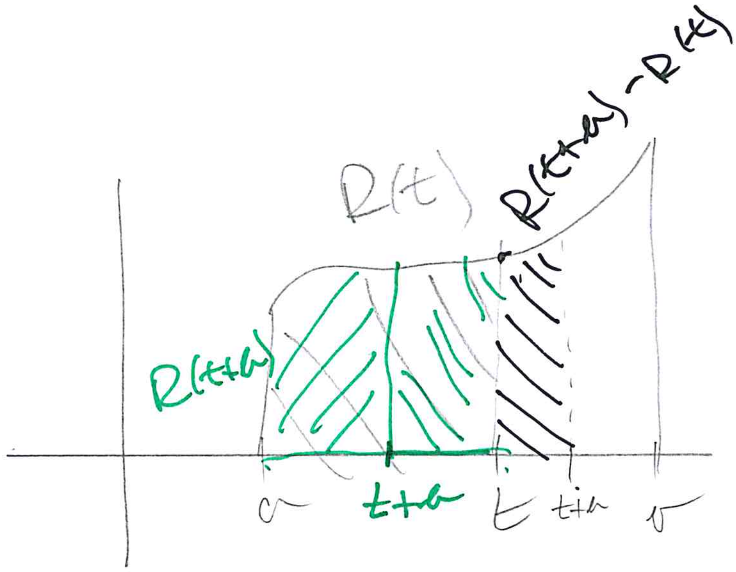
$$R(t+h) - R(t) = -(R) \int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a ze spojitosti funkce f v bodě t dostaneme pro malé h přibližně

$$(R) \int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \doteq -h f(t)$$

Odtud dostaneme (15). □

V důkazu se hodí zavést integrál pro obecnější meze, viz následující definice.



$$R'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{R(t+h) - R(t)}{h}$$

z (i) věty 19 lze

$$\underbrace{(R)\int_a^t f(x)\,dx}_{=R(t)} + (R)\int_t^{t+h} f(x)\,dx = \underbrace{(R)\int_a^{t+h} f(x)\,dx}_{R(t+h)}$$

$$R(t+h) - R(t) = (R)\int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

$$\approx f(t)\cdot h$$

$$\frac{R(t+h) - R(t)}{h} \doteq f(t)$$

odtud $R'(t) = f(t)$

např. $\int_2^1 f(x)\,dx := -\int_1^2 f(x)\,dx$

Definice 21. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I. Nechť $\alpha, \beta \in I$, $\alpha > \beta$. Definujeme

$$\begin{aligned}(R)\int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x &= 0\\ (R)\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x &= -(R)\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Lemma 22. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I. Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in I$.

Pak platí

$$(R)\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

Důkaz. Pro $\alpha < \beta < \gamma$ je (16) totožné s (13). Zbývá probrat ostatní možnosti pro α, β, γ. Ukážeme dva případy, ostatní necháme čtenáři jako cvičení.

Nechť je $\alpha = \gamma > \beta$. Pak je

$$\begin{aligned}(R)\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x &= -(R)\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\\ (R)\int_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x &= (R)\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\\ (R)\int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x &= 0\end{aligned}$$

Dosazením do (16) dostaneme po úpravě nulu na obou stranách rovnosti, a tedy (16) platí.

Nechť je $\beta > \alpha > \gamma$. Pak z (13) plyne

$$(R)\int_\gamma^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_\gamma^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dosazením z definice 21 dostaneme

$$-(R)\int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = -(R)\int_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x$$

a odtud po úpravě dostaneme (16). □

Důkaz věty o derivaci integrálu podle horní meze. Pro $t, t+h \in (a,b)$ je

$$R(t+h) - R(t) = \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nechť je f spojitá v bodě t. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (t-\delta, t+\delta)$ je

$$f(t) - \varepsilon < f(x) < f(t) + \varepsilon \tag{17}$$

Zvolme $h \in (0, \delta)$. Pak z (17) a z monotonie integrálu podle integrované funkce plyne

$$(R)\int_t^{t+h} f(t) - \varepsilon\,\mathrm{d}x \le (R)\int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x \le (R)\int_t^{t+h} f(t) + \varepsilon\,\mathrm{d}x$$

Integrál z konstantní funkce je roven dle (3)

$$(R)\int_t^{t+h} f(t) - \varepsilon\,\mathrm{d}x = (f(t)-\varepsilon)h, \quad (R)\int_t^{t+h} f(t) + \varepsilon\,\mathrm{d}x = (f(t)+\varepsilon)h.$$

Odtud dostaneme

$$(f(t)-\varepsilon)h \le R(t+h) - R(t) \le (f(t)+\varepsilon)h$$

Nerovnosti vydělíme $h > 0$ a odečteme $f(t)$. Dostaneme

$$-\varepsilon \le \frac{R(t+h) - R(t)}{h} - f(t) \le \varepsilon \tag{18}$$

Odtud plyne

$$\lim_{h\to 0+} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} = f(t) \tag{19}$$

Podobně pro $h \in (-\delta, 0)$ dostaneme

$$(R)\int_{t+h}^{t} \underbrace{f(t) - \varepsilon}_{D}\,\mathrm{d}x \le (R)\int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \le (R)\int_{t+h}^{t} \underbrace{f(t) + \varepsilon}_{H}\,\mathrm{d}x$$

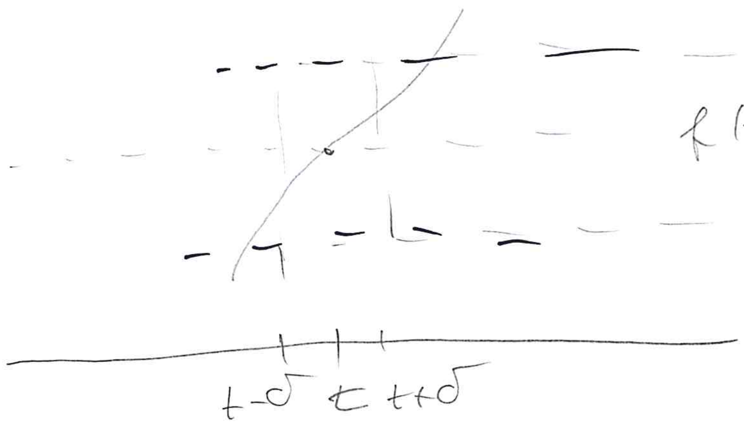
odtud

$$-h(f(t)-\varepsilon) \le R(t) - R(t+h) \le -h(f(t)+\varepsilon)$$

Odtud vydělením $-h > 0$ a odečtením $f(t)$ dostaneme (18) a dále

$$\lim_{h\to 0-} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} = f(t) \tag{20}$$

Z (19), (20) pak plyne $R'(t) = f(t)$. □



$H := f(t)+\varepsilon$

$D := f(t)-\varepsilon$

Zvolme $\varepsilon > 0$

ex. $\delta > 0$ tž.

$\forall x \in U_\delta(t) : D \leq f(x) \leq H$

odtud a z vlastnosti (ii) plyne:

$h>0$: $h<\delta$:

$$\int_t^{t+h} D \, dx \leq \int_t^{t+h} f(x) \, dx$$

$$D \cdot h \leq R(t+h) - R(t) \leq H \cdot h \qquad \Big| : h > 0$$

$$D \leq \frac{R(t+h)-R(t)}{h} \leq H$$

$$f(t) - \varepsilon \leq \frac{R(t+h)-R(t)}{h} \leq f(t) + \varepsilon \qquad \Big| - f(t)$$

$$-\varepsilon \leq \frac{R(t+h)-R(t)}{h} - f(t) \leq \varepsilon$$

$$\Big| \quad \text{— " —} \quad \Big| \leq \varepsilon$$

$\searrow 0 \Rightarrow R'_+(t) = f(t)$

Věta 23 důležitá. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $I = (a, b)$. Nechť f je funkce spojitá na I.

Nechť $c \in I$. Definujme funkci R_c vztahem

$$R_c(t) := (R) \int_c^t f(x)\, \mathrm{d}x \tag{21}$$

Pak je f_c diferencovatelná na I a platí $\boxed{R_c' = f.}$

Důkaz. Nechť je $t > c$. Pak vztah $R_c'(t) = f(t)$ plyne z věty o derivování integrálu podle horní meze.

Nechť je $t \leq c$. Zvolme $c_0 \in (a, t)$. Pak z aditivity integrálu podle integračního oboru plyne

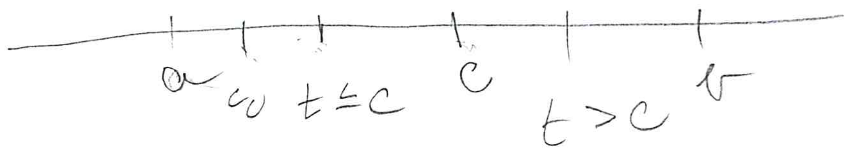
$$(R) \int_{c_0}^t f(x)\, \mathrm{d}x + \underbrace{(R) \int_t^c f(x)\, \mathrm{d}x}_{= -R_c(t)} = (R) \int_{c_0}^c f(x)\, \mathrm{d}x$$

Odtud po úpravě a dosazení z (21) dostaneme

$$R_c(t) = (R) \int_{c_0}^t f(x)\, \mathrm{d}x - (R) \int_{c_0}^c f(x)\, \mathrm{d}x$$

Na pravé straně zderivujeme levý integrál podle horní meze a dostaneme $f(t)$. Pravý integrál je konstantní (nezávisí na proměnné t), jeho derivace je tedy rovna nule.

Dostáváme tedy $R_c'(t) = f(t)$. □



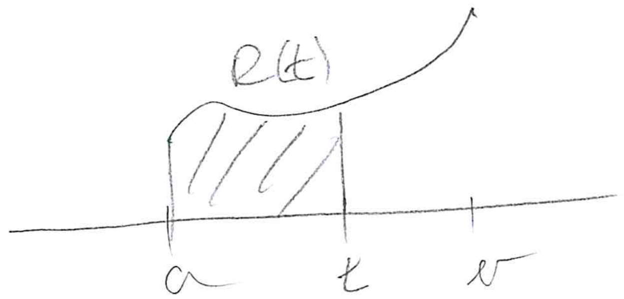
Lemma 24. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I. Označme pro $t \in (a, b)$

$$R(t) := (R) \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pak platí

$$\lim_{t \to a^+} R(t) = 0 \ (*) \qquad \lim_{t \to b^-} R(t) = (R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz.



Protože je f riemannovsky integrovatelná na I, tak je na I omezená, tj.

$$\exists K \ \forall x \in I : \quad |f(x)| \leq K$$

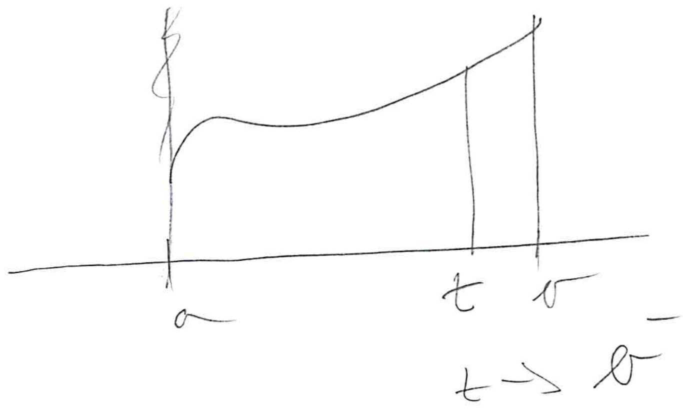
$$-K \leq f(x) \leq K$$

Z vlastnosti (ii) plyne:

$$\int_a^t -K\,dx \leq \int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t K\,dx$$

$$\underset{\substack{\downarrow\, t \to a^+ \\ 0}}{-K(t-a)} \leq \quad -\text{"}- \quad \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{K(t-a)}$$

z věty o limitě sevřené funkce plyne (*)



z vlastnosti (i) plyne:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{(R)\int_a^t f(x)\,dx}_{R(t)} + \int_t^b f(x)\,dx$$

$$\int_t^b f(x)\,dx \to 0 \quad \text{pro } t \to b^-$$

Chceme:

$$\cancel{(R)\int_t^b} \quad R(t) = (R)\int_a^b f(x)\,dx - \boxed{\int_t^b f(x)\,dx} \to 0$$

$$-K \le f(x) \le K$$

$$\underset{\downarrow\, 0}{-K(b-t)} \le (R)\int_t^b f(x)\,dx \le \underset{\downarrow\, 0}{K(b-t)}$$

odtud

$$\lim_{t \to b^-} R(t) = (R)\int_a^b f(x)\,dx - 0$$