Primitivní funkce

Definice 25 (primitivní funkce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Nechť je funkce f definovaná na intervalu I.

Funkci F definovanou na I nazveme *primitivní funkcí funkce f na intervalu I*, pokud platí

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x) \tag{22}$$

Příklad 26. Ukážeme, že funkce $F(x) = \log|x|$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (-\infty, 0)$.

Příklad 27. Ukážeme, že funkce $F(x) = \log(2x)$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (0, \infty)$.

Příklad 26.

$$x \in (-\infty, 0) : F'(x) = (\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = f(x)$$

Příklad 27.

$$x \in (0, +\infty) : F'(x) = (\log(2x))' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} = f(x)$$

Pozorování:

$$(\log(2x))' = \frac{1}{x} = (\log(x))'$$

Věta 28 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$, f je funkce f definovaná na intervalu I. Nechť F_1, F_2 jsou primitivní funkce funkce f na intervalu I.

Pak platí

$$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall x \in I : F_2(x) = F_1(x) + C$$

to chceme

Důkaz.

Označme pro $x \in I$: $g(x) = F_2(x) - F_1(x)$.

Ukážeme, že $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall x \in I : g(x) = C$

Pro $x \in I$:

$$g'(x) = \left(F_2(x) - F_1(x)\right)' =$$

$$= F_2'(x) - F_1'(x) =$$

$$= f(x) - f(x) = 0$$

Zvolme $c \in I$, $x \in I$, $x > c$. $x < c$

Pak g je spojitá na $[c, x]$ a diferencovatelná na (c, x). (x, c)

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $\exists d \in (c, x)$ (x, c):

$$\frac{g(c) - g(x)}{c - x} = g'(d) = 0$$

odtud: $\underline{g(x) = g(c)}$

Zvolme: $C = g(c)$, pak $\forall x \in I : g(x) = C$

$\blacksquare$

Věta 29 důležitá (o existenci primitivní funkce ke spojité funkci). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Nechť je funkce f spojitá na intervalu I.

Pak existuje funkce F primitivní k f na I.

Důkaz. Zvolme $x_0 \in I$. Protože je funkce f spojitá na intervalu I, existuje dle věty 18 pro $x \in I$ integrál v (23).

Definujme funkci F

$$F(x) = (R) \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t \tag{23}$$

Ve větě 23 jsme ukázali, že pro $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. Odtud plyne, že je F primitivní funkce f na intervalu I. □

Poznámka:

$f(x) = e^{-x^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, proto existuje primitivní funkce F k f na $\mathbb{R}$

platí: F není možné vyjádřit pomocí elementárních funkcí