Newtonův integrál

Definice 30 (Newtonův integrál). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$, nechť jsou funkce f, F definované na intervalu I. Nechť je F primitivní funkce f na I. Nechť existují konečné limity

$$\lim_{x \to a^+} F(x), \qquad \lim_{x \to b^-} F(x)$$

Pak říkáme, že je funkce f *Newtonovsky integrovatelná na intervalu* I a *Newtonovým integrálem funkce* f *na* I nazýváme číslo

$$[F(x)]_a^b$$

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x) \tag{24}$$

Hodnotu na pravé straně (24) nazýváme *Newtonovým integrálem* i v případě, že je některá z limit nevlastní a jejich rozdíl je definován.

Příklad 31. Vypočteme $(N) \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 32. Ukážeme, že $f(x) = \frac{1}{x}$ není Newtonovsky integrovatelná na intervalu $(-1, 2)$.

Příklad 33. Vypočteme $(N) \int_{-1}^2 |x|\,\mathrm{d}x$.

Příklad 31.

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x \in (0, 4)$

$F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ je primitivní funkce f na $(0, 4)$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} = \frac{2}{3} 2^3 = \frac{16}{3}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = 0$$

$$(N)\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{16}{3}$$

Příklad 32.

! Takto ne !

$$(N)\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^{2} = \log|2| - \log|-1| =$$
$$= \log 2$$

~~x∈~~ $x = 0 \in (-1,2)$, a neplatí

$F'(0) = f(0)$

není definováno

když f má newtonovy integrovatelné na ~~to~~ $(-1,2)$

Příklad 33.

$$(N)\int_{-1}^{2} |x|\,dx$$

k $f(x) = |x|$ je

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \in (0,2) \\ -\frac{x^2}{2} & x \in (-1,0) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

potom $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (-1,2) \setminus \{0\}$

$F'(0)$: $F'_+(0) = \left(\frac{x^2}{2}\right)'_{x=0} = (2x)_{x=0} = 0$

$F'_-(0) = \left(-\frac{x^2}{2}\right)'_{x=0} = (-2x)_{x=0} = 0$

Tedy $F'(0) = 0 = f(0)$

$(|0|)$

$$(N)\int_{-1}^{2}|x|\,dx = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{2} - \lim_{x\to -1^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{2} - \left(-\frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Věta 34 (o vlastnostech Newtonova integrálu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Nechť jsou funkce f, g definované na I.
Pak platí

(i) Nechť je f newtonovsky integrovatelná na intervalu I a nechť $c \in (a, b)$.
Pak je f newtonovsky integrovatelná na intervalech (a, c), (c, b) a platí

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (N) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (25)$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivitou vzhledem k integračnímu oboru.*

(ii) Nechť je f newtonovsky integrovatelná na I. Nechť platí

$$\forall x \in I : f(x) \geq 0.$$

Pak platí

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \qquad (26)$$

Tuto vlastnost nazýváme *pozitivitou newtonova integrálu.*

(iii) Nechť jsou f, g newtonovsky integrovatelné na I. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Pak je funkce $h = \alpha f + \beta g$ newtonovsky integrovatelné na I a platí (na pravé straně jsme pro větší přehlednost vynechali značku (N))

$$(N) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Tuto vlastnost nazýváme *linearitou newtonova integrálu.*

(iv) Nechť jsou f, g newtonovsky integrovatelné na I. Nechť platí

$$\forall x \in I : f(x) \leq g(x).$$

Pak platí

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (N) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (27)$$

Tuto vlastnost nazýváme *monotonií newtonova integrálu.*

Důkaz.

(i) f je newtonovsky integrovatelná na (a, b), tedy existuje na (a, b) ~~fci~~ primitivní funkce F

odtud:

$$(N)\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{x\to c^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

$$(N)\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to c^+} F(x)$$

vzhledem k součtu

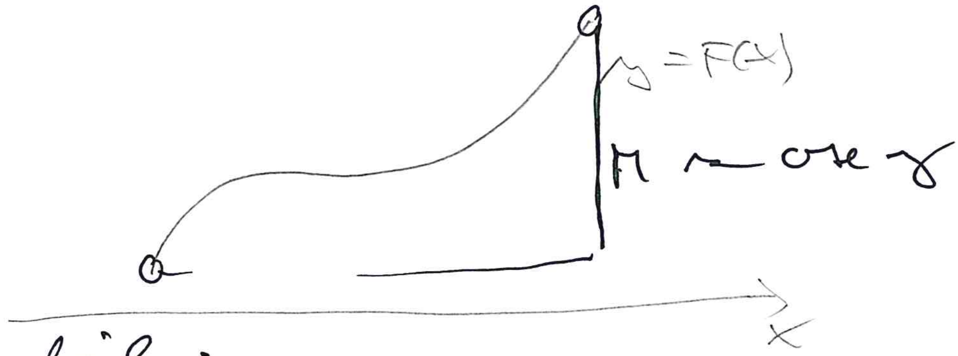
$$(N)\int_a^c f(x)\,dx + (N)\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

protože F je spojitá (protože je diferencovatelná), platí $\lim_{x\to c^-} F(x) = \lim_{x\to c^+} F(x) =$

$= F(c)$

□

(iii) f je newtonovsky integrovatelná, proto existuje primitivní funkce F na (a,b). $F'(x) = f(x)$, z $f(x) \geq 0$ na (a,b) plyne, že F je neklesající na (a,b) (z věty o derivaci a monotonii



dále:

$$\lim_{x\to b^-} F(x) = \sup\{F(x) : x \in (a,b)\}$$

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \inf\{F(x) : x \in (a,b)\}$$

označme $M = \{F(x) : x \in (a,b)\}$

$$\sup M \geq \inf M$$

potom $(N)\int_a^b f(x)\,dx = \sup M - \inf M \geq 0$

□

(iii)

~~dosadíme~~ $\cancel{h = \alpha f + \beta g}$ ~~do~~

$$\cancel{(N)\int_a^b h(x)\,dx = (N)\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx}$$

~~pomocí je.~~

(iii) f, g jsou newtonovsky integrovatelné na (a,b), proto existují F, G primitivní k f, g na (a,b) a

$$\mathrm{I} \qquad (N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

$$\mathrm{II} \qquad (N)\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} G(x) - \lim_{x\to a^+} G(x)$$

$\alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{II}$:

$$\mathrm{III} \quad \alpha (N)\int_a^b f(x)\,dx + \beta (N)\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} H(x)$$

$$= \alpha\left(\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)\right) +$$

$$+ \beta\left(\lim_{x\to b^-} G(x) - \lim_{x\to a^+} G(x)\right) \quad \lim_{x\to a^+} H(x)$$

definujme $H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$ pro $x \in (a,b)$

$$H'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$$

věta o linearitě derivací

$$= \alpha f(x) + \beta g(x) = h(x)$$

odtud: H je primitivní k h na (a,b)

$$\boxed{\lim_{x\to b^-} H(x) = \alpha \lim_{x\to b^-} F(x) + \beta \lim_{x\to b^-} G(x)}$$

věta o aritmetice limit

Pravá strana $\boxed{\text{III}}$ je tedy

$$\lim_{x\to b^-} H(x) - \lim_{x\to a^+} H(x)$$

$$- \alpha \lim_{x\to a^+} F(x) - \beta \lim_{x\to a^+} G(x)$$

věta o aritmetice limit

tedy pravá strana $\boxed{\text{III}}$ je

$$(N) \int_a^b h(x)\,dx$$

$\square$

(IV)

definuje $h(x) = g(x) - f(x)$
pro $x \in (a, b)$

pak platí $\forall x \in I : h(x) \geq 0$

tedy z (ii) plyne $(N)\int_a^b h(x)\, dx \geq 0$

tedy $(N)\int_a^b g(x) - f(x)\, dx \geq 0$

postupně (iii): $(1 \cdot g + (-1) \cdot f)$

$$(N)\int_a^b g(x)\, dx - (N)\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

po úpravě:

$$(N)\int_a^b g(x)\, dx \geq (N)\int_a^b f(x)\, dx$$

$\square$

Věta 35 důležitá (Newton – Leibniz). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$. Nechť je funkce f spojitá na intervalu I.

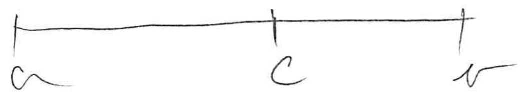
Pak je f riemannovsky integrovatelná na I, newtonovsky integrovatelná na (a, b) a platí

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

Důkaz. Protože je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I, je na něm podle věty 15 riemannovsky integrovatelná.

Zvolme $c \in (a, b)$. Pak je dle věty 29 funkce F primitivní k f na intervalu (a, b)

$$F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

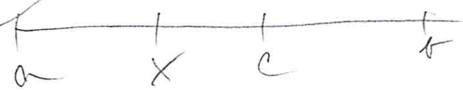


Definujme dále pro $x \in (a, b)$

$$R(x) = (R)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Z aditivity Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru (věta 16, (i)) plyne

$$(R)\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = (R)\int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + (R)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$



Odtud dosazením z definice funkcí F, R dostaneme

$$F(x) = (R)\int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + R(x)$$

Z limit v lemmá ~~21~~ 24 plyne (člen s integrálem je konstantní – nezávisí na proměnné x)

$(\lim_{x\to a^+} R(x) = 0)$

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = (R)\int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

$=$

$$\lim_{x\to b^-} F(x) = (R)\int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + (R)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\lim_{x\to b^-} R(x) = (R)\int_a^b f(t)$

Odtud plyne, že je f newtonovsky integrovatelná na (a, b) a platí rovnost (28). $\square$

$$\underbrace{\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)}_{} = (R)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= (N)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Příklady 36.

1. Vypočteme integrál $(N)\int_{-1}^{2}|x|\,\mathrm{d}x$.

   Protože je funkce $f(x)=|x|$ spojitá na intervalu $I=[-1,2]$, je dle Newton-Leibnizovy věty na intervalu I newtonovsky integrovatelná. Můžeme tedy použít aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru (věta 34 (i)).

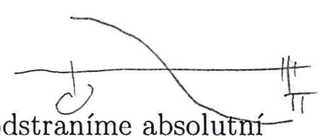
   Odtud plyne

$$(N)\int_{-1}^{2}|x|\,\mathrm{d}x=(N)\int_{-1}^{0}\underbrace{|x|}_{=-x}\,\mathrm{d}x+(N)\int_{0}^{2}\underbrace{|x|}_{=-x}\,\mathrm{d}x \quad = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{2}\right]_{0}^{2}=\ldots\frac{5}{2}$$

   V těchto integrálech lze odstranit absolutní hodnotu a další výpočet necháme na čtenáři.

2. Vypočteme integrál $(N)\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

   Po úpravě dostaneme $(N)\int_{0}^{\pi}|\cos(x)|\,\mathrm{d}x$.



   Použijeme aditivitu integrálu, poté v integrálech odstraníme absolutní hodnotu a mínus vytkneme před integrál

$$(N)\int_{0}^{\pi}|\cos(x)|\,\mathrm{d}x=(N)\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\,\mathrm{d}x-(N)\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

   Výpočtem pak dostaneme

$$(N)\int_{0}^{\pi}|\cos(x)|\,\mathrm{d}x=2.$$