Definice (absolutně konvergentní řada)

Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje, pokud konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Příklad:

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$ absolutně konverguje protože $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{2^k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \in R$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ nekonverguje absolutně

protože $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = +\infty$

Poznámka:

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Věta (o konvergenci absolutně konvergentní řady)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada, která absolutně konverguje.

Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Důkaz.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje

$\Updownarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje

$\Updownarrow$

posloupnost $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ konverguje.

$\Updownarrow$

posloupnost $\{S_n\}$ je Cauchyovská.

$$|\Delta_{n+k} - \Delta_n| = \left|\sum_{i=1}^{n+k} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |a_i|$$

trojúhelníková nerovnost

$(|x+y| \leq |x| + |y|$

$|x_1 + x_2 + \dots + x_N| \leq |x_1| + \dots + |x_N|)$

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} |a_i| = \sum_{i=1}^{n+k} |a_i| - \sum_{i=1}^{n} |a_i| =$$

$$= S_{n+k} - S_n =$$

$$= |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$$

$$|\Delta_{n+k} - \Delta_n| \leq |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$$

proto je $|\Delta_{n+k} - \Delta_n| < \varepsilon$

tedy je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ Cauchyovská (respektive je posloupnost $\{\Delta_n\}$ cauchyovská)

a tedy je konvergentní.

$\boxtimes$

Řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazveme

<u>neabsolutně konvergentní,</u>

pokud konverguje ale nekonverguje absolutně.

<u>Příklad</u>

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ neabsolutně konverguje

Věta (D'Alembertovo - limitní podílové - kritérium absolutní konvergence řad)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada

a nechť existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

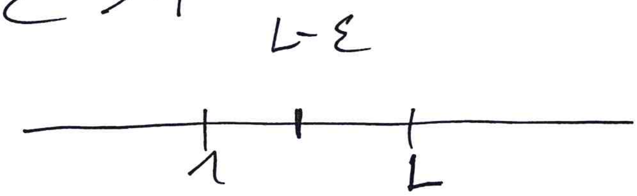
Pak platí

(i) Je-li $L > 1$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje

(ii) Je-li $L < 1$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

Hlavní myšlenky důkazu:

(i) $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > L - \varepsilon > 1$



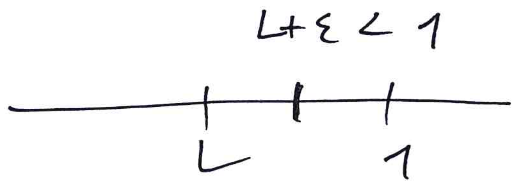

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$$

$$|a_{k+1}| > |a_k|$$

odtud plyne, že $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$

proto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje

(ii) $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < L+\varepsilon < 1$$




$$L+\varepsilon =: q$$

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\ |a_{n_0}|$$

$$|a_n| \le |a_{n_0}|\cdot q^{n-n_0}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n_0}|\cdot q^{n-n_0}$$

konverguje

proto $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konverguje

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje.

$\boxtimes$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \qquad a_k = \frac{(-1)^k}{k}$$

$$a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}}{\frac{(-1)^k}{k}}\right| = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k(1+\frac{1}{k})} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} =$$

$$\stackrel{VAL}{=} \frac{1}{1+0} = 1$$

Závěr: D'Alembertovo kritérium nedokáže rozhodnout o konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

# Příklad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}}{3^k}$$

$$a_k = \frac{\sqrt{k^2+1}}{3^k}$$

$$a_{k+1} = \frac{\sqrt{(k+1)^2+1}}{3^{k+1}}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\dfrac{\sqrt{(k+1)^2+1}}{3^{k+1}}}{\dfrac{\sqrt{k^2+1}}{3^k}} = \frac{\sqrt{k^2+2k+2}}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{\sqrt{k^2+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{k^2+2k+1}}{3\sqrt{k^2+1}} = \frac{k\sqrt{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}}{3k\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}}}{3\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{VAL, VLSF}} \frac{\sqrt{1+0+0}}{3\sqrt{1+0}} = \frac{1}{3}$$

Závěr: $L = \frac{1}{3} < 1$, proto řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}}{3^k}$ absolutně konverguje

Příklad (není na videu)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

$$a_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}}{\frac{(2k)!}{(k!)^2}} = \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} \cdot \frac{(k!)^2}{(2k)!} =$$

$$= \frac{(2k)!\,(2k+1)(2k+2)}{(k!\,(k+1))^2} \cdot \frac{(k!)^2}{(2k)!} =$$

$$= \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = \frac{k^2\left(2+\frac{1}{k}\right)\left(2+\frac{2}{k}\right)}{k^2\left(1+\frac{1}{k}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2+\frac{1}{k}\right)\left(2+\frac{2}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{VAL} \frac{(2+0)(2+0)}{(1+0)^2} = 4$$

závěr: $L = 4 > 1$, proto řada nekonverguje

Protože nekonverguje, tak ani nekonverguje absolutně.